

## Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

vizsga 2024. december 12. 10:00. Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér.

1. Juliska szalagavatóra, ballagásra, érettségire, felvételire, gólyatáborra és gólyabálra készül, ezért ruhákat próbál. Minden ruhadarab, amit felpróbál, az előzményektől függetlenül  $\frac{1}{5}$  valószínűséggel tetszik neki: ezeket megveszi, a többi nem. A felsorolt programokhoz összesen 100 ruhadarabra van szüksége. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy elég lesz 450 (vagy annál kevesebb) ruhadarabot felpróbálnia.
2. Mórickenak az anyukája minden délután felvisz a szobájába egy kupac mosott ruhát. Ezt Móricken nem mindig pakolja el: minden este, az előzményektől függetlenül, 0.4 valószínűséggel két kupac ruhát pakol el, 0.4 valószínűséggel egyet, 0.2 valószínűséggel pedig egyet sem. Kivétel, ha csak egy kupacot talál, mert akkor azt az egyet 0.8 valószínűséggel pakolja el. Jelölje  $X_n$  a Móricken szobájában található ruhakupacok számát az  $n$ -edik napon éjfélkor.
  - a.) Írjuk fel az  $X_n$  Markov lánc állapotterét, és rajzoljuk fel a gráf-reprezentációját.
  - b.) Szeptember 1-jén éjfélkor 1 kupac ruha volt a szobájában. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy december 31-én éjfélkor 1 se lesz?
  - c.) Átlagosan hány kupac ruha éjszakázik a szekrényen kívül hosszú távon?
3. Pistike nassol: mazsolát, ropit és gumicukrot eszik felváltva. Konkrétan: a mazsola nassolását az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen idő után unja meg, átlagosan 5 perc alatt, majd (szabályos) érmedobással dönt, hogy ropival vagy gumicukorral folytassa. Ugyanígy a ropit átlagosan 4, a gumicukrot pedig átlagosan 3 perc után unja meg (az előzményektől független exponenciális idő alatt), és érmedobással dönt, hogy a másik kettő közül melyikkel folytassa.
  - a.) Délben Pistike éppen ropit nassol. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy este 6-kor éppen gumicukrot?
  - b.) Mazsolából percenként 10 gramm fogy el, ropiból 15, gumicukorból 5 (amikor éppen azt eszi). Hány gramm nasit fogyaszt el Pistike percenként, hosszú idő átlagában?
4. Egy szobában az egyes napokon mért hőmérsékletek független, normális eloszlásúnak tekinthető valószínűségi változók, aminek várható értéke a termosztáton beállított érték, szórását nem ismerjük. Jancsi szobájában az elmúlt napokban rendre 24.6; 21.8; 26.1; 29.8; 24.3; 26.1; 25.2; 24.2; 24.8; 23.6 fokot mértünk (a termosztáthoz ez alatt senki sem nyúlt). Döntsünk 95%-os konfidenciaszinten arról a hipotézisről, hogy Jancsi szobájában a termosztát legalább 25 fokra van állítva.

(A fenti 10 szám összege 250.5, négyzetösszege 6314.03)
5. Bergengóciában az emberek 40%-a faluban, 30%-a kisvárosban, 30%-a nagyvárosban él. Egy közvélemény-kutatás során a kutatók 380 falusit, 300 kisvárosit és 320 nagyvárosit kérdeztek meg. Döntsünk 95%-os konfidencia-szinten arról a hipotézisről, hogy a megkérdezettek kiválasztásánál a település-típusnak nem volt jelentősége.