pp (4) = vizsga (1)

1. megoldás: Legyen $n=450$ a megengedett próbálkozások száma és

legyen $i=1,2,\dots,n$-re $X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik próba után vásárol} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$

Így $S_n = X_1+\dots+X_n$ a 450 próbálkozásból megvett ruhák száma,

és a kérdés $\mathbb{P}(S_n \geq 100)$.

A szöveg szerint $X_1,\dots,X_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{5}\right)$ függetlenek.

1. megoldás a) változat: X_i-k korlátosak $\Rightarrow$ alkalmazható a Hoeffding egyenlőtlenség: $a_i := 0 \leq X_i \leq 1 =: b_i$, $\mathbb{E}S_n = n\,\mathbb{E}X_i = 450\cdot\frac{1}{5} = 90$,

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2 = 450(1-0)^2 = 450, \text{ és } t:=10 \text{ választással}$$

$$\mathbb{P}(S_n \geq 100) = \mathbb{P}(S_n \geq \overset{90}{\mathbb{E}S_n} + \overset{10}{t}) \leq \exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right\} \leq e^{-\frac{200}{450}} \approx 0.64$$

$= \underline{64\%}$

1. megoldás b) változat: X_i-k azonos eloszlásúak $\Rightarrow$ alkalmazható a Cramér tétel: $\mathbb{P}(S_n \geq 100) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \frac{100}{450}\right) = \mathbb{P}(S_n/n \in [a,b))$ ahol $a = \frac{100}{450} \approx 0.222$

$b = \infty$

Mivel $a > m$,

$m = \mathbb{E}X_i = \frac{1}{5}$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a,b)\right) \lesssim e^{-nI(a)}$$ ahol I a ~~B(p)~~ $\mathcal{B}(p=\frac{1}{5})$ eloszlás

Cramér rátafüggvénye:

$$I(x) = x\ln\frac{x}{p} + (1-x)\ln\frac{1-x}{1-p} = x\ln\frac{x}{1/5} + (1-x)\ln\frac{1-x}{1-\frac{1}{5}}.$$

Spec. $a = \frac{100}{450}$-nel $I(a) \approx 1.5027658\cdot 10^{-3} \Rightarrow nI(a) \approx 0.676$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_n \geq 100) \lesssim e^{-nI(a)} \approx 0.509 = \underline{50.9\%}$$

PP(4) ~~ka~~ = vizsga (1)

2. megoldás: legyen $n = 100$ a megveendő rahadarabok száma, és $i = 1, 2, \dots, n$-re legyen X_i az i-edik rahadarab megvásárlásához szükséges próbák száma. Így $X_i \sim Geom\left(p = \frac{1}{5}\right)$ függetlenek, és

$S_n := X_1 + \dots + X_n$ az összes szükséges próbai száma.

A kérdés $\mathbb{P}(S_n \leq 450)$.

Mivel az X_i-k függetlenek és azonos eloszlásúak, ha használható a Cramér tétel: $m = \mathbb{E}X_i = \frac{1}{p} = 5$,

$$\mathbb{P}(S_n \leq 450) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{450}{100} = 4{,}5\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a, b]\right) \lessapprox$$

ahol $a = 1$, $b = 4{,}5 < m$

$$\leq e^{-nI(b)}$$ ahol I a $Geom(p)$ eloszlás Cramér rátafüggvénye: $I(x) = (x-1)\ln\frac{x-1}{1-p} - x\ln x - \ln p$

Spec. $b = 4{,}5$, $p = \frac{1}{5}$ esetén $I(b) \approx 6{,}762446 \cdot 10^{-3}$

$\Rightarrow nI(b) \approx 0{,}676$

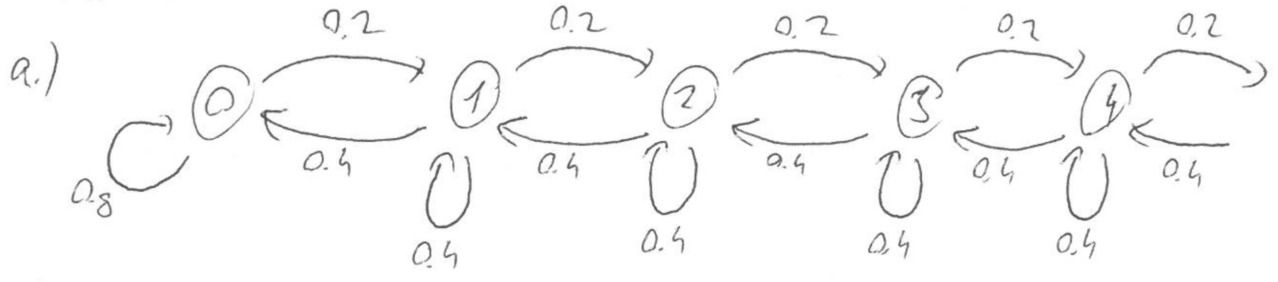
$\Rightarrow \mathbb{P}(S_n \leq 450) \lessapprox e^{-nI(a)} \approx 0{,}509 = \underline{50{,}9\%}$

v (2) Mivel minden nap pontosan 1 kupac érkezik, a kupacok száma

- 1-gyel nő, ha nem pakol el semmit
- változatlan, ha 1 kupacot pakol el
- 1-gyel csökken, ha 2 kupacot pakol el

Vagyis

a.)



b.) X_n születési-halálozási folyamat, egyetlen stacionárius eloszlása π ahol $\pi_k P_{k,k+1} = \pi_{k+1} P_{k+1,k}$ vagyis

$$\pi_k \frac{2}{10} = \pi_{k+1} \cdot \frac{4}{10} \Rightarrow \pi_{k+1} = \frac{1}{2} \pi_k$$

$\Rightarrow \pi_k = const \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k$, vagyis $\boxed{\pi = PesszGeom\left(p = \frac{1}{2}\right)}$

X_n irreducibilis és aperiodikus, (mert pl $P_{00} \neq 0$), így a Markov láncok konvergenciatétele szerint a kezdeti eloszlástól függetlenül nagy n-re

$P(X_n = 0) \approx \pi_0 = q p^0 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ és $n = 121$ nap hosszú idő.

c.) Az ergodtétel értelmében az $f(X_n) = X_n$ függvény időátlaga hosszú távon $\mathbb{E}_\pi f = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k f(k) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \cdot k = \mathbb{E}\left(PesszGeom\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$

$$= \frac{1}{1/2} - 1 = 2 - 1 = \underline{\underline{1}}$$

✓ (3) Legyen $S = \{$matsda, ~~gumicukor~~, ropi, gumicukor$\} = \{1, 2, 3\}$ a Pistike állapottere, és legyen $X(t) \in S$ az, hogy t perc elteltével éppen mit nassol.

Így $X(t)$ folytonos idejű Markov lánc.

A várakozási idő paraméter vektor $\underline{\lambda} = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$, mert az exponenciális T_i várakozási időkre $ET_i = \frac{1}{\lambda_i}$.

A beépített diszkrét idejű Markov lánc átmenetmátrixa a kockadobásokból $Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Ezekből összerakva az infinitezimális generátor

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

A stacionárius eloszlás: $G^T \Pi^T = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{5} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right) \overset{\times 120}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -24 & 15 & 20 & 0 \\ 12 & -30 & 20 & 0 \\ 12 & 15 & -40 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc} -24 & 15 & 20 \\ 0 & -45 & 60 \\ \cancel{0} & \cancel{45} & \cancel{60} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} -24 & 15 & 20 \\ 0 & -3 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \Pi \parallel (5 \;\; 4 \;\; 3)$$

Ebből az egyetlen stacionárius eloszlás $\Pi = \left(\frac{5}{12} \;\; \frac{4}{12} \;\; \frac{3}{12}\right)$

[Hát persze: minden állapotban ugyanannyiszor ugrik, de „matsda" állapotban átlag 5 percet tölt, „ropi" állapotban átlag 4-et, „gumicukor" állapotban átlag 3-at.]

a.) $X(t)$ véges állapotterű és irreducibilis, $\boxed{t = 360}$ (perc) hosszú idő $\Rightarrow$ a Markov láncok alaptétele szerint $\mathbb{P}(X(t)=3 \mid X(0)=2) \approx \Pi_3 = \frac{3}{12} = \underline{\underline{25\%}}$

b.) Az ergodtétel szerint az $f = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$ függvény időátlaga hosszú távon

$$\mathbb{E}_\Pi f = \Pi f = \left(\frac{5}{12} \;\; \frac{4}{12} \;\; \frac{3}{12}\right) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{50+60+15}{12} = \frac{125}{12} \approx \underline{\underline{10.4}} \; \frac{\text{gramm}}{\text{perc}}$$ az átlagfogyasztása.

v (4) Egymintás egyoldali t-próbát kellene csinálni a
$H_0: m \geq \mu$ null-hipotézissel, ahol $\mu = 25$ a hipotetikus várható érték, m pedig a (z ismeretlen) tényleges várható érték.

Mivel az átlag $\overline{x} = \frac{250.5}{10} = 25.05 > \mu$, ezért a null-hipotézist további számolás nélkül <u>ELFOGADJUK</u>.

v (5) Illeszkedésvizsgálatot végzünk: a null-hipotézis szerint a mintát a

i	1: falusi	2: kisvárosi	3: nagyvárosi
p_i	0.4	0.3	0.3

eloszlásból vettük. ⟹ a kategóriák száma <u>r=3</u>

A táblázat-számok

i	1: falusi	2: kisvárosi	3: nagyvárosi
ν_i	380	300	320

⟹ a mintaméret <u>n=1000</u>

Ebből a teszt-statisztika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(\nu_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(380-400)^2}{400} + \frac{(300-300)^2}{300} + \frac{(320-300)^2}{300} =$$

$$= \frac{20^2}{400} + \frac{0^2}{300} + \frac{20^2}{300} = 1 + \frac{4}{3} = \boxed{2.33\dot{3}}$$

Az elfogadási küszöb $1-\varepsilon = 95\%$-os szinten <u>$\varepsilon = 0.05$-tel</u> a <u>df</u> $= r-1 =$ <u>2</u> szabadsági fokú χ^2-eloszlásból $\boxed{K = 5.991}$

<u>Döntés</u>: $\chi^2 \leq K$ ⟹ a null-hipotézist <u>ELFOGADJUK</u>.