Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

vizsga 2024. december 17. 10:00. Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér.

1. Egy tantárgyból az oktató a vizsgajegyeket vaktában adja: minden hallgató a többitől függetlenül 10% valószínűséggel 1-est, 20% valószínűséggel 2-est, 40% valószínűséggel 3-ast, 20% valószínűséggel 4-est és 10% valószínűséggel 5-öst kap. Pistike a centrális határeloszlás tétel segítségével próbálja közelíteni annak valószínűségét, hogy a 100 fős vizsgán az átlag legalább 3.5 lesz. Legfeljebb mennyi lehet Pistike közelítésének hibája a Berry-Esseen tétel szerint?

   (A tételbeli konstanst vehetjük 0.4748*-nak.)*

2. Jancsi és Juliska néha a közös autójukkal megy munkába: Jancsi minden reggel az előzményektől függetlenül $\frac{1}{3}$ valószínűséggel, Juliska pedig minden reggel az előzményektől és Jancsitól is függetlenül $\frac{1}{2}$ valószínűséggel. (Ha egyikük sem autóval megy, akkor az autó aznap áll; másra senki sem használja.) A tükörről néha lelóg egy plüssmaci, ami Jancsit zavarja, Juliska viszont szereti. Ezért ha Jancsi egyedül utazik, leveszi a tükörről a macit és elteszi a kesztyűtartóba. Ha Juliska utazik egyedül, felakasztja a macit a tükörre. Amikor viszont mindketten autóval mennek munkába, akkor egyikük se nyúl a macihoz: marad, ahol volt.

   a.) Hétfő hajnalban a maci a kesztyűtartóban volt. Mennyi a valószínűsége, hogy kedden hajnalban már a tükrön lógott?

   b.) Hétfő hajnalban a maci ott lógott a tükrön. Mennyi a valószínűsége, hogy kedden hajnalban is ott lógott?

   c.) Az idő mekkora hányadát tölti a maci a tükrön hosszú távon?

3. A karácsonyi vásárban a forralt boros pulthoz a vevők egymástól független, exponenciális eloszlású véletlen időközönként érkeznek, $\frac{1}{2}$ perc várható értékkel, és beállnak a sorba. A sor elején álló vevő kiszolgálása is mindig az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen ideig tart, 1 vevő/perc rátával. Jelölje $X(t)$ a sor hosszát t perc elteltével.

   a.) Rajzoljuk fel az $X(t)$ Markov lánc gráf-reprezentációját.

   b.) Mennyi lesz a sor átlagos hossza hosszú idő átlagában?

4. Csillagászok arra kíváncsiak, hogy egy csillag fényessége időben változik-e. Ezért megmérték a fényességet tavaly nyáron és idén nyáron is (magnitudóban, ami egy csillag-fényességmértékegység). Igen ám, de a fényességet csak hibával terhelten tudják mérni: a mért érték normális eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke a tényleges fényesség, szórása pedig 0.01 (magnitudó). Ezért tavaly nyáron és idén nyáron is 10-10 független mérést végeztek el, és a következő értékeket kapták:

   Tavaly nyáron: 0.575, 0.593, 0.565, 0.571, 0.577, 0.572, 0.568, 0.588, 0.559, 0.571

   Idén nyáron: 0.584, 0.575, 0.595, 0.588, 0.589, 0.602, 0.581, 0.584, 0.591, 0.593

   Döntsünk 90%-os konfidenciaszinten arról a hipotézisről, hogy a csillag fényessége nem változott.

   (A tavalyi adatsorban a számok összege 5.739*, négyzeteik összege* 3.294543*. Az idei adatsorban a számok összege* 5.882*, négyzeteik összege* 3.460322*.)*

5. Ági néni tegnap az iskolában az elsősök közül 13-nak adott fekete pontot, 5-nek pirosat, 10-nek semmilyet. A másodikosok közül viszont 6 kapott fekete pontot, 10 pirosat, és 12 semmilyet. Döntsünk 95%-os konfidenciaszinten arról a hipotézisről, hogy a piros és fekete pontokért az elsősök és másodikosok ugyanolyan esélyekkel indulnak.