① Legyen $n=100$ és $i=1,2,\dots,n$-re legyen X_i az i-edik hallgató jegye. Az X_i-k függetlenek, közös eloszlásuk

k	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X_i=k)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

Ebből $m := \mathbb{E}X_i = \frac{1}{10}\cdot 1 + \frac{2}{10}\cdot 2 + \frac{4}{10}\cdot 3 + \frac{2}{10}\cdot 4 + \frac{1}{10}\cdot 5 = 3$

$$\sigma^2 := \operatorname{Var} X = \mathbb{E}\left((X_i-m)^2\right) = \frac{1}{10}(1-3)^2 + \frac{2}{10}(2-3)^2 + \frac{4}{10}(3-3)^2 + \frac{2}{10}(4-3)^2 + \frac{1}{10}(5-3)^2 = \frac{2\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot 2\cdot 1}{10} = 1.2$$

$$\delta := \mathbb{E}\left(|X_i-m|^3\right) = \frac{1}{10}|1-3|^3 + \frac{2}{10}|2-3|^3 + \frac{4}{10}|3-3|^3 + \frac{2}{10}|4-3|^3 + \frac{1}{10}|5-3|^3 = \frac{2\cdot 1\cdot 8 + 2\cdot 2\cdot 1}{10} = 2$$

Így $S_n := X_1 + \dots + X_n$-re a

$\mathbb{P}(\cancel{S_n \geq}\ \frac{S_n}{n} \geq 3.5) = \mathbb{P}(S_n \geq 350)$ valószínűség CHT közelítésének hibája a Berry-Esseen tétel szerint.

$$\boxed{\text{hiba} \leq \frac{C\delta}{\sqrt{n}\,\sigma^3} = \frac{0.4748\cdot 2}{\sqrt{100}\,\sqrt{1.2}^3} \approx 0.072 = 7.2\%}$$

②

a.) $\mathbb{P}$(kedden tükrön lóg | hétfőn nem) $= \mathbb{P}$(Juliska autóval megy, de Jancsi nem) $\underline{\underline{\text{függetlenség}}}$ $\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$

b.) $\mathbb{P}$(kedden tükrön lóg | hétfőn tükrön lóg) $= 1 - \mathbb{P}$(levették | tükrön lógott)

$= 1 - \mathbb{P}$(Jancsi autóval megy, de Juliska nem) $=$

$\underline{\underline{\text{függetlenség}}}$ $1 - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \cancel{\frac{1}{6}}\ \frac{5}{6}$

c.) Legyen $X_n = \begin{cases} 1, & \text{ha az } n\text{-edik napon a maci a tükrön lóg} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$

Így $X_n \in S = \{0, 1\}$ Markov lánc, vagyis ON-OFF folyamat, átmenetmátrixa az előző pontok alapján $P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/6 & 5/6 \end{pmatrix}$ ← a.) ← b.)

Az egyetlen stacionárius eloszlás: $(P^T - \mathbb{1})\pi^T = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1/3 & 1/6 & 0 \\ \cancel{1/3} & \cancel{-1/6} & \cancel{0} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \text{ vagyis } \pi_1 = \frac{1}{2}\pi_2$$

$\pi \parallel (1\ 2)$, normálva

$$\boxed{\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)}$$

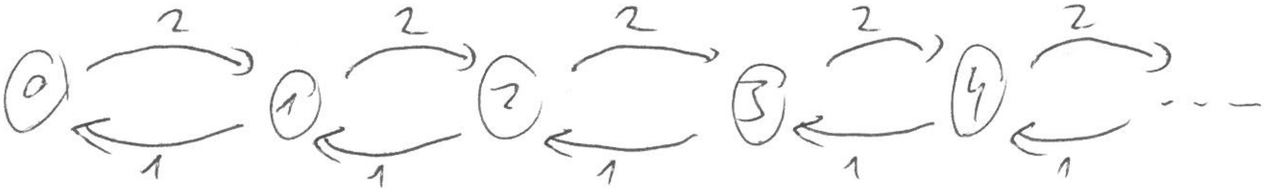
Mivel X_n irreducibilis, ~~aperiodikus~~ és véges állapotterű, az $\boxed{\text{ergodtétel}}$ értelmében hosszú távon az idő $\boxed{\pi_1 = \frac{2}{3}}$ hányadát tölti az 1-es állapotban: ennyit lóg a maci a tükrön.

③ A felfelé ugrás rátája $2 \frac{\text{vevő}}{\text{perc}}$ (érkezés)

a lefelé ugrás rátája $1 \frac{\text{vevő}}{\text{perc}}$ (kiszolgálás).

Az állapottér $S = \{0, 1, 2, \dots\}$

a.) Így a gráf-reprezentáció



b.) A folyamat láthatóan instabil, mert jobbra driftes:

érkezési ráta > kiszolgálási ráta

$\Rightarrow$ 1 val. séggel sorhossz $\xrightarrow{t \to \infty} \infty$, így

$\boxed{\text{a sorhossz időátlaga is } \infty}$.

(4) 2-mintás 2-oldali u-próbát végzünk.

mert két adatsort kell összehasonlítani

mert a null-hipotézis egyenlőség

mert a mérések szórása ismert : $\sigma_1 = 0.01 = \sigma_2$

A null-hipotézis $H_0 : m_1 = m_2$

a teszt-statisztika $u = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}}$ ahol *

- $\bar{x}$ a tavalyi mérési eredmények átlaga
- $\bar{y}$ az idei — // —
- $n_1 = n_2 = 10$

Vagyis $u = \dfrac{0.5739 - 0.5882}{\sqrt{\underbrace{\frac{0.01^2}{10} + \frac{0.01^2}{10}}_{\frac{0.01^2}{5}}}} = \dfrac{-0.0143}{0.01}\sqrt{5} \approx -3.198$

az elfogadási küszöb

$K = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ahol $\varepsilon = 0.1$ mert a konfidenciaszint $1 - \varepsilon = 90\%$

Vagyis $K = \phi^{-1}(0.95) \approx 1.65$

Döntés: $|t| > K \Rightarrow \boxed{H_0\text{-t ELUTASÍTJUK}}$, és 90%-os szinten bizonyítottnak tekintjük hogy a fényesség változott.

(5) Homogenitásvizsgálatot végzünk annak eldöntésére, hogy a két minta azonos eloszlásból származik-e. Találat-számok:

$\boxed{r=3}$

i	1: fekete	2: piros	3: színtelen	összesen
ν_i: alsósok	13	5	10	$n=28$
μ_i: másodikosok	6	10	12	$m=28$
$\nu_i+\mu_i$	19	15	22	

A teszt-statisztika

$$\chi^2 = nm\sum_{i=1}^{r}\frac{\left(\frac{\nu_i}{n}-\frac{\mu_i}{m}\right)^2}{\nu_i+\mu_i} =$$

$$= 28\cdot 28\cdot\left[\frac{\left(\frac{13}{28}-\frac{6}{28}\right)^2}{19}+\frac{\left(\frac{5}{28}-\frac{10}{28}\right)^2}{15}+\frac{\left(\frac{10}{28}-\frac{12}{28}\right)^2}{22}\right] =$$

$$= \frac{(13-6)^2}{19}+\frac{(5-10)^2}{15}+\frac{(10-12)^2}{22} = \frac{49}{19}+\frac{25}{15}+\frac{4}{22}\approx 4.427$$

Az elfogadási küszöb a $df=r-1=2$ szabadsági fokú χ^2-eloszlás $1-\varepsilon$-kvantilise, ahol $\varepsilon=0.05$ (mert a konfidenciaszint $1-\varepsilon=95\%$)

Táblázatból $K=5.991$

Döntés: $\chi^2\leq K \Rightarrow$ a hipotézist $\boxed{\text{ELFOGADJUK}}$.