Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

vizsga 2025. január 7. 10:00. Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér.

1. Móricka telefonos ügyfélszolgálaton dolgozik napi nyolc órában. Munkaidejében a hívások Poisson folyamat szerint érkeznek hozzá, óránként átlagosan 3. Minden munkanap végeztével, az előzményektől függetlenül $\frac{1}{100}$ valószínűséggel Móricka besokall, azonnal felmond, és soha többet nem megy vissza. Határozzuk meg a felmondásáig Móricka által fogadott telefonhívások számának

   a.) várható értékét,

   b.) generátorfüggvényét.

   (Tipp: Legyen N Móricka munkanapjainak száma a felmondásig, és legyen X_i az i-edik napon érkező hívások száma.)

2. Pistike minden nap más színű pulóvert visel (az előző naphoz képest). Négy pulóvere van: egy piros, egy sárga, egy zöld és egy kék. A következő napon felveendő pulcsi színéről mindig kockadobással dönt, a következő szabály szerint:

   - A kék után: ha a dobás eredménye páros, akkor piros, egyébként zöld következik.
   - A zöld után: ha a dobás eredménye 5 vagy 6, akkor piros, egyébként kék következik.
   - A sárga után: ha a dobás eredménye 6, akkor piros; ha 4 vagy 5, akkor kék; egyébként zöld következik.
   - A piros után mindig sárga következik.

   A napok hány százalékában lesz Pistike piros pulcsiban hosszú távon?

3. Egy boltban a vevők Poisson folyamat szerint érkeznek a pénztárhoz, percenként átlagosan 1, és beállnak az egyetlen sorba. A pénztárosok a sorra került vevőket az előzményektől független, exponenciális eloszlású véletlen idő alatt szolgálják ki, aminek várható értéke 1 perc. Ha a sorban legalább 3 vevő van (beleértve az éppen kiszolgálás alatt állókat is), akkor két pénztáros dolgozik, egyébként csak egy. (Kivéve persze ha egy vevő sincs, mert akkor egy pénztáros se dolgozik.) Jelöljük $X(t)$-vel a sorban álló vevők számát t perc elteltével (beleértve az éppen kiszolgálás alatt állókat is).

   (a) Rajzoljuk fel az $X(t)$ folytonos idejű Markov lánc gráf-reprezentációját.

   (b) Keressük meg az $X(t)$ stacionárius eloszlásait.

   (c) Nyitáskor a sor üres. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 6 óra elteltével is éppen üres?

4. Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(1-x)^{\alpha-1}, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

   ahol $\alpha > 0$ ismeretlen paraméter. Mintát vettünk X-ből, és az jött ki, hogy 0.83; 0.96; 0.83; 0.97; 0.89. Adjunk maximum likelihood becslést az α paraméter értékére.

5. Egy nagy egyetemen 100 hallgatót véletlenszerűen kiválasztva 60 lányt találtunk. Döntsünk 95%-os konfidenciaszinten arról a hipotézisről, hogy az egyetemen a hallgatók 70%-a lány.