(1) A tipp szerint $N \sim Geom(p)$ ahol $p = \frac{1}{100}$

és $X_i \sim Poi(\lambda)$ ahol $\lambda = 3 \cdot 8 = 24$.

Így ~~az általa fo~~ a Móricka által fogadott összes hívás száma az

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i \quad \text{véletlen tagszámú összeg,}$$

ezért

a.) $\boxed{\mathbb{E}S_N = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_i = \frac{1}{p} \cdot \lambda = \underline{\underline{2400}}}$

b.) $g_{S_N}(z) = g_N(g_{X_i}(z))$, amiből $\qquad q = 1-p$ jelöléssel

$$g_N(z) = \frac{pz}{1-qz} = \frac{\frac{1}{100}z}{1-\frac{99}{100}z} = \frac{z}{100-99z}$$

$$g_{X_i}(z) = e^{\lambda(z-1)} = e^{24(z-1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{g_{S_N}(z) = \frac{e^{24(z-1)}}{100 - 99e^{24(z-1)}}}$$

② Legyen X_n a pulóver színe az n-edik napon:

$$X_n \in S := \{1, 2, 3, 4\} = \{\text{piros, sárga, zöld, kék}\}$$

Így X_n időben homogén Markov lánc, az átmenet-mátrixa a szöveg szerint

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{piros után} \\ \leftarrow \text{sárga után} \\ \leftarrow \text{zöld után} \\ \leftarrow \text{kék után} \end{array}$$

$$\underbrace{\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{piros} & \text{sárga} & \text{zöld} & \text{kék} \end{array}}_{\text{következő}}$$

A Markov lánc irreducibilis, P pedig bisztochasztikus (vagyis minden oszlop-összeg is 1), ezért az egyetlen stacionárius eloszlás az egyenletes: $\Pi = \left(\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\right)$

Ezért az ergodtétel szerint hosszú távon a napok

$\boxed{\Pi_1 = \Pi_{piros} = \frac{1}{4} = 25\%}$-ában lesz Pistike pirosban.

3 a.)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "1"] & 1 \arrow[l, bend left, "1"] \arrow[r, bend left, "1"] & 2 \arrow[l, bend left, "1"] \arrow[r, bend left, "1"] & 3 \arrow[l, bend left, "2"] \arrow[r, bend left, "1"] & 4 \arrow[l, bend left, "2"] \arrow[r, bend left, "1"] & 5 \arrow[l, bend left, "2"] \arrow[r, bend left, "1"] & \cdots \arrow[l, bend left, "2"]
\end{tikzcd}$$

Az érkezési ráta mindig 1 vevő/perc,

a kiszolgálási ráta 1 vevő/perc, ha 1 vagy 2 vevő van

2 —||— 3 vagy több —||—

[és persze 0, ha nincs vevő].

b.) $X(t)$ születési-halálozási folyamat, ezért ha van egyáltalán π stac. eloszlás akkor az olyan, hogy $\pi_i \lambda_{i,i+1} = \pi_{i+1} \lambda_{i+1,i}$. Esetünkben

[Ahol λ_{ij} az i-ből j-be ugrás rátája]

$$\left.\begin{aligned}
&\pi_0 = \pi_1 = \pi_2 \\
&\pi_2 = 2\pi_3 \\
&\pi_3 = 2\pi_4 \\
&\vdots \\
&\pi_k = 2\pi_{k+1} \text{ minden } k \geq 2\text{-re}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi = \text{konstans} \cdot \left(1 \quad 1 \quad 1 \quad \underbrace{\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{8} \quad \tfrac{1}{16} \quad \cdots}\right)$$

a konstans $= \frac{1}{4}$ $\Leftarrow$ ezek összege pont $= 1$

$$\boxed{\pi = \left(\tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{4} \quad \tfrac{1}{8} \quad \tfrac{1}{16} \quad \tfrac{1}{32} \quad \tfrac{1}{64} \quad \cdots\right)}$$ az egyetlen stac. ee.

c.) $\boxed{t = 360}$ perc hosszú idő, ~~a Marko~~ ~~tétel~~ a Markov láncok alaptétele szerint és X_n pozitív rekurrens,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_t = 0 \mid X_0 = 0) \approx \pi_0 = \frac{1}{4}}$$

(4) Legyen az $n=5$ elemű minta $X_1, X_2, \dots, X_5$.

Így a likelihood-függvény

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} f_\alpha(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \alpha (1-x_i)^{\alpha-1}$$

(mivel $\forall x_i \in (0,1)$ teljesül)

Ebből a log-likelihood függvény

$$\ell(\alpha) = \ln L(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln \alpha + (\alpha-1) \ln (1-x_i) \right] = n \ln \alpha + (\alpha-1) \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)$$

ennek maximum-helyét keressük:

$$0 = \ell'(\alpha) = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)$$

amiből $$\alpha_{ML} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln(1-x_i)}$$

Ebből a nevező $\ln(1-0.83) + \ln(1-0.96) + \ln(1-0.83) + \ln(1-0.97) + \ln(1-0.89)$

$$\approx -12.476622\ldots$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_{ML} \approx -\frac{5}{-12.476622\ldots} \approx 0.40075}$$

[A minta igazából $\alpha = 0.4$ paraméterrel volt véletlen generálva.]

(5) <u>Illeszkedés-vizsgálatot</u> végzünk, a hipotetikus eloszlás

i	fiú	lány
p_i	0.3	0.7

, a minta pedig

i	fiú	lány	össz
ν_i	40	60	100

$\underbrace{\text{fiú} \quad \text{lány}}_{r=2}$, $100 = n$.

így a teszt-statisztika

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\nu_i - np_i}{np_i} \right)^2 = \left(\frac{40-30}{30} \right)^2 + \left(\frac{60-70}{70} \right)^2 = \frac{100}{30} + \frac{100}{70} \approx 4.762$$

A konfidenciaszint $1-\varepsilon = 95\% \Rightarrow \varepsilon = 0.05$,

az elfogadási küszöb a $df = r-1 = 1$ szabadsági fokú

χ^2-eloszlás $(1-\varepsilon)$-kvantilise, táblázatból $K = 3.841$

<u>Döntés:</u> $\chi^2 > K \Rightarrow$ a null-hipotézist $\boxed{\text{ELUTASÍTJUK}}$

[És 95%-os konfidenciaszinten bizonyítottnak tekintjük,
hogy a lányok aránya nem 70%.]