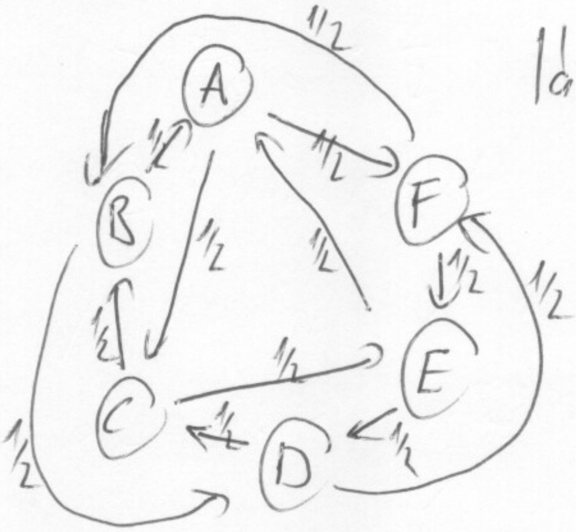
(1) A könyvtár-listázási ill. egyéb kérések a teljes kérés-folyamat egy szinezése, ezért függetlenek, és az egyéb kérések Poi-folyamatának intenzitása

$$5 \frac{\text{kérés}}{\text{perc}} \cdot \frac{1}{2} = 2.5 \frac{1}{\text{perc}},$$ így a várható érték 2 perc alatt 5.

Vagyis ha $X$ a 08:00:00 és 08:02:00 között érkező könyvtár-kérések száma, $Y$ pedig ugyanekkor az egyéb kérések száma, akkor a kérdés

$$\boxed{\mathbb{P}(X+Y=10 \mid X=3)} = \mathbb{P}(Y=7 \mid X=3) \underset{\text{független}}{\overset{X \text{ és } Y}{=}} \mathbb{P}(Y=7) \underset{Y \sim Poi(5)}{=} e^{-5}\frac{5^7}{7!} \approx 0.1044 = 10.44\%$$

(2) Legyen $X_n \in \{A, B, C, D, E, F\}$ a maci helye n dobás után az alábbi rajz szerint (a játék felülnézetből) és az $X_n$ diszkrét idejű Markov




lánc gráf-reprezentációja.

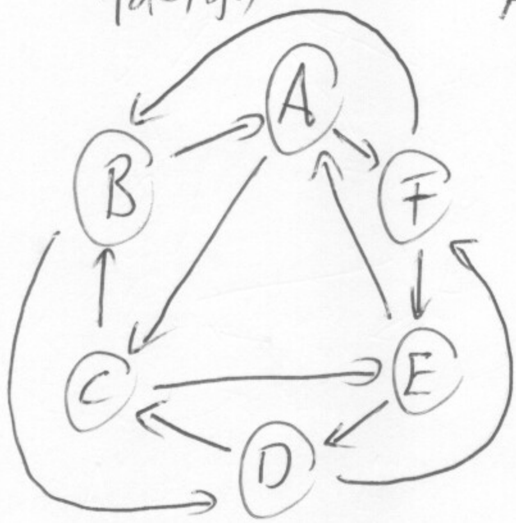
A rajzból látható, hogy az $X_n$ Markov lánc <u>periodikus</u> $d=3$ periódussal, vagyis

Aladártól Aladárhoz a maci csak 0, 3, 6, 9, ..., 99, 102, ... lépésben kerülhet vissza, 100 lépésben NEM.

Ezért a kérdezett valószínűség

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{100} = A \mid X_0 = A) = 0}$$

③ Legyen $X(t)$ a maci helye $t$ idő elteltével, $X(t) \in \{A, B, C, D, E, F\}$ az alábbi ábra szerint (az $X(t)$ folytonos idejű Markov lánc gráf-reprezentációja):




Az ugrási ráta minden élen $5 \frac{\text{ugrás}}{\text{perc}}$ (mert a várakozási idő mindenütt 6 sec, vagyis az elugrás rátája $10 \frac{1}{\text{perc}}$, ami egyenlően oszlik el a 2 kimenő él között). Az $X(t)$ Markov lánc folytonos idejű, véges állapotterű és irreducibilis, továbbá $t = 10$ perc hosszú idő $\Longrightarrow$ a Markov láncok alaptétele szerint

$\mathbb{P}(X(10) = A \mid X(0) = A) \approx \pi_A$ ahol $\pi$ az egyetlen stacionárius eloszlás. A játék szimmetriájából (minden játékos szerepe azonos) látszik, hogy a $\pi = \left(\frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\right)$ egyenletes eloszlás stacionárius, vagyis $\boxed{\pi_A = \frac{1}{6}}$ a válasz.

[Avagy: az infinitezimális generátor

$$G = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 5 & -10 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -10 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 5 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

bisztochasztikus (minden oszlop összeg is nulla) $\Rightarrow$ $\pi$ egyenletes.

4) A válaszok táblázata

| spenót / Minecraft | A nem | B igen | össz. |
|---|---|---|---|
| 1. nem | 280 | 90 | 370 |
| 2. igen | 540 | 90 | 630 |
| össz. | 820 | 180 | 1000 |

(Az aláhúzottak a szöveg-beli adatok, a többi azért annyi, hogy a sor- és oszlopösszegek kijöjjenek.)

Végezhetünk függetlenség-vizsgálatot VAGY homogenitás-vizsgálatot, hogy az 1. és 2. sor azonos eloszlásból származik-e, VAGY homogenitás-vizsgálatot, hogy az A és B oszlop azonos eloszlásból származik-e. Mindháromból ugyanaz jön ki. Pl.

H0: Az 1. és 2. sor ugyanabból az eloszlásból vett minta → homogenitásvizsgálat. A képletgyűjtemény jelöléseivel $r=2$,

| | $i$ | spenótot eszi 1: nem | 2: igen | össz |
|---|---|---|---|---|
| nem Minecraftozók | $\nu_i$ | 280 | 90 | $n=370$ |
| Minecraftozók | $\mu_i$ | 540 | 90 | $m=630$ |

, $\boxed{\varepsilon=0{,}1}$ a 90%-os szinthez.

Teszt-statisztika: $\chi^2 = nm\sum_{i=1}^{r}\frac{\left(\frac{\nu_i}{n}-\frac{\mu_i}{m}\right)^2}{\nu_i+\mu_i} = 370\cdot 630\left[\frac{\left(\frac{280}{370}-\frac{540}{630}\right)^2}{280+540}+\frac{\left(\frac{90}{370}-\frac{90}{630}\right)^2}{90+90}\right] \approx 15.915$

Az elfogadási küszöb $df=r-1=1$ szabadsági fokú $\chi^2$ eloszlásból $\varepsilon=0.1$-hez $K=2.706$

Döntés: $\chi^2 > K \Rightarrow$ H0-t ELUTASÍTJUK.

5. Mivel minden $x_i > 0$, a likelihood-függvény ($n=6$ elemű mintára)

$$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} f_\alpha(x_i) = \prod_{i=1}^{n} 3\alpha x_i^2 e^{-\alpha x_i^3},$$ ennek logaritmusa

$$\ell(\alpha) = \ln L(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln 3 + \ln\alpha + \ln x_i^2 - \alpha x_i^3\right] =$$

$$= n\ln 3 + n\ln\alpha + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i^2 - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^3 \longrightarrow \max$$

Ehhez a derivált legyen nulla

$$0 = \ell'(\alpha) = 0 + \frac{n}{\alpha} + 0 - \sum_{i=1}^{n} x_i^3,$$ amiből

$$\boxed{\alpha_{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i^3}}$$

Esetünkben $n=6$,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 1.41^3 + 1.94^3 + 1.74^3 + 1.24^3 + 1.28^3 + 1.74^3 = 24.644429$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_{ML} = \frac{6}{24.644429} \approx 0.243}$$