

Felsőbb matematika villamosmérnököknek - Sztochasztika

vizsga 2025. január 21. 10:00. Munkaidő: 90 perc. Minden feladat 12 pontot ér.

- Móricának egy oldalnyi vizsgadolgozat kijavítása átlagosan 2 percébe kerül, de 5 percnél többet semmiképpen sem szán rá. Egy vizsga után azt vállalta, hogy 4 óra múlva megmutatja a kijavított dolgozatokat, ám a buzgó hallgatóktól 100 oldalnyi javítanivalót kapott. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy nem végez időre a javítással.
- Három királylány egy királyfit próbál kiszabadítani a gonosz boszorka fogságából, de sose sikerül nekik. Minden nap más-más királylány próbálkozik, és pedig úgy, hogy a következő próbálkozóról kockadobással döntenek: aki éppen próbálkozott, az nem lehet a következő, a másik kettő közül viszont $\frac{2}{3}$ valószínűséggel az idősebbik, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel a fiatalabbik kerül sorra. (A királylányok mind különböző korúak.) Hosszú távon a napok hány százalékában lesz a próbálkozó a legidősebb királylány?
- Jancsiéknál a lépcsőházban 3 villanykörte van, amik folyton égnek (hacsak nincsenek éppen kiégve). Élettartamuk egymástól független, exponenciális eloszlású, 1.5 év várható értékkel. Ha 1 vagy 2 körte kiég, Jancsi nem törődik vele, de ha az utolsó is kiég, akkor rögtön újra cseréli mind a hármat. (Így sosincs teljesen sötét: a működő körték száma 1-ről rögtön 3-ra változik, amikor az az 1 körte kiég.)
 - Amikor Juliska meglátogatta Jancsit, éppen 2 körte működött. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy egy hét múlva már csak 1?
 - Egy körte egy év alatt 5000 Ft-ba kerülő áramot fogyaszt.¹ Mennyi lesz Jancsinál a lépcsőház-világítás átlagos havi villanyszámlája hosszú távon?
- Az X valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f_{\theta}(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^2} e^{-\frac{\theta}{x}}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases},$$

ahol $\theta > 0$ ismeretlen paraméter. Mintát vettünk X -ből, és azt kaptuk, hogy 0.67; 2.89; 6.34; 1.00; 6.07; 2.58. Adjunk nagy eltérés becslést a θ paraméter értékére!

Megjegyzés: Ez az exponenciális eloszlás egy egyszerű transzformáltja, de a feladat szempontjából ez nem fontos.

- Egy izzó anyagból származó fényben egy színekpvonálhoz tartozó fotonok frekvenciája normális eloszlású valószínűségi változó, melynek szórása 2.5GHz (ismert), várható értéke ismeretlen. Megmértük néhány, a színekpvonálhoz tartozó foton frekvenciáját és azt kaptuk GHz-ben, hogy 508826; 508822; 508826; 508828; 508824; 508828; 508823; 508822; 508822; 508831. Döntsünk 99%-os konfidenciaszinten arról a hipotézisről, hogy a várható érték nem nagyobb mint 508827GHz.

(A fenti 10 szám összege 5088252, négyzeteik összege 2589030841638.)

¹Pontosabban: villamos energiát.