① Legyen $n=100$ és $i=1,2,\dots,n$-re
$X_i :=$ az i-edik oldal kijavításához szükséges idő percben.
Így $\mathbb{E}X_i=2$, $0\le X_i\le 5$, $S_n:=\sum_{i=1}^n X_i$ a javítás
össz-időtartama (percben), ~~az X_i-k függ.~~
Tfh az X_i-k függetlenek.
A kérdés $\mathbb{P}(S_n>240)$ (nagy eltérés becslése).

A Hoeffding egyenlőtlenség szerint $\forall\, t>0$-ra

$$\mathbb{P}(S_n\ge ES_n+t)\le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)^2}\right)$$

ahol $a_i\le X_i\le b_i$, esetünkben $a_i=0$, $b_i=5$ ~~$=\sum_{i=1}^n (b_i-a_i)^2=10$~~

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (b_i-a_i)^2=100(5-0)^2=2500$$

$$\mathbb{E}S_n=n\,\mathbb{E}X_i=200$$

$\Rightarrow$ $\boxed{t:=40}$ választással

$$\mathbb{P}(S_n>240)=\mathbb{P}(S_n>\mathbb{E}S_n+t)\le \exp\left(-\frac{2\cdot 40^2}{2500}\right)=e^{-1.28}\approx 0.278$$

$=27.8\%$, elég nagy ☹

② Legyen $S=\{$legkisebb, középső, legnagyobb$\}=\{1,2,3\}$ és legyen $X_n \in S$, hogy az n-edik napon melyik királylány próbálkozik. A szöveg szerint X_n időben homogén Markov lánc, átmenetmátrixa

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

A kérdés a 3-as állapot előfordulási gyakorisága hosszú távon, vagyis

$$R:=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{k:\ 0\le k\le n-1,\ X_k=2\}.$$

A Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis $\Longrightarrow$ az ergodtétel szerint $R=\pi_2$ ahol π az egyetlen stacionárius megoldás. Ennek kiszámolása: $(P^T-\mathbb{1})\pi^T=0$,

vagyis

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & -1 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{\text{sor-}}{\underset{\text{csere}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 7 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{8} & \cancel{-7} & \cancel{0} \end{array}\right) \Rightarrow \pi_2=\frac{7}{8}\pi_3,\quad \pi_1=3\pi_2-2\pi_3$$

Pl. $\pi_3=8 \Rightarrow \pi_2=7 \Rightarrow \pi_1=5$ vagyis $\bar{\pi}=(5\ \ 7\ \ 8)$ jó lenne, de normálni kell: $\pi=\left(\frac{5}{20}\ \ \frac{7}{20}\ \ \frac{8}{20}\right)$

$\Rightarrow$ a válasz $\boxed{\pi_2=\frac{8}{20}=40\%}$: A napok 40%-ában próbálkozik a legidősebb királylány.

3) Legyen $X_t \in S = \{1,2,3\}$ a működő villanykörték száma t idő elteltével, ha az időt mérjük években.

X_t folytonos idejű Markov lánc, gráf-reprezentációja

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "\lambda_{13}"'] & 2 \arrow[l, "\lambda_{21}"'] & 3 \arrow[l, "\lambda_{32}"'] \end{tikzcd}$$

, ahol

- λ_{13} az egyetlen működő körte kiégési rátája, vagyis

$$\lambda_{13} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3} \quad \left(\frac{\text{villanykörte}}{\text{év}} \right)$$

- $\lambda_{21} = 2\lambda_{13}$ a két működő körte valamelyikének kiégési rátája
- $\lambda_{32} = 3\lambda_{13}$ a 3 — // —

Vagyis

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend right, "2/3"'] & 2 \arrow[l, "4/3"'] & 3 \arrow[l, "6/3"'] \end{tikzcd}$$

, az infinitezimális generátor

$$\boxed{G = \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 2/3 \\ 4/3 & -4/3 & 0 \\ 0 & 6/3 & -6/3 \end{pmatrix}}$$

a.) $\mathbb{P}\left(X\left(\frac{1}{52}\right)=1 \;\middle|\; X(0)=2\right) \underset{\text{rövid idő}}{\overset{\Delta t := \frac{1}{52}}{\approx}} \lambda_{21}\cdot\Delta t = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{52} = \underline{\underline{\frac{1}{39} \approx 2.6\%}}$

b.) A havi villanyszámla i körte működése esetén forintban $i\cdot\frac{5000}{12}$, vagyis a kérdés $f(X(t))$ időátlaga, ahol $f: S \to \mathbb{R}$ $f(i) = \frac{5000}{12}i$, avagy

$$f = \begin{pmatrix} 1\cdot\frac{5000}{12} \\ 2\cdot\frac{5000}{12} \\ 3\cdot\frac{5000}{12} \end{pmatrix}.$$

A Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis $\Longrightarrow$ az ergodtétel szerint ez az időátlag

$$\bar{f} = \sum_{i=1}^{3} \pi_i f(i) = \pi\cdot f,$$ ahol π az egyetlen stacionárius eloszlás.

③ folytatás

π meghatározása: $G^T\pi^T = 0$, vagyis

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2/3 & 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & -4/3 & 6/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & -6/3 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{-2} & \cancel{-3} \end{pmatrix}$$

amiből $\pi_3 = 2$ választással $\pi_2 = 3$, $\pi_1 = 6 \Rightarrow \pi \parallel (6 \;\; 3 \;\; 2)$,

avagy normálás után $\pi = \left(\frac{6}{11} \;\; \frac{3}{11} \;\; \frac{2}{11}\right)$

Válasz: $\bar{f} = \left(\frac{6}{11} \;\; \frac{3}{11} \;\; \frac{2}{11}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot \frac{5000}{12} \\ 2 \cdot \frac{5000}{12} \\ 3 \cdot \frac{5000}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{11} \cdot \frac{5000}{12} \cdot (6 \;\; 3 \;\; 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{11} \cdot \frac{5000}{12} \cdot (6+6+6) \approx \underline{\underline{682}} \quad (\text{forint})$$

(4) Legyen $n=6$ és a minta $X_1, \dots, X_n$. Mivel minden $X_i > 0$, a likelihood-függvény

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta}{x_i^2} e^{-\frac{\theta}{x_i}}$$

, amiből a log-likelihood-fv.

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \left[\ln\theta - \ln(x_i^2) - \frac{\theta}{x_i} \right] =$$

$$= n \ln\theta - \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i^2) - \theta \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i},$$

ennek keressük a maximum-helyét.

Ehhez $0 =: \ell'(\theta) = \frac{n}{\theta} - 0 - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$, vagyis

$$\boxed{\theta_{ML} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}}$$

Esetünkben $n=6$; $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} = \frac{1}{0.67} + \frac{1}{2.89} + \frac{1}{6.34} + \frac{1}{1.00} + \frac{1}{6.07} + \frac{1}{2.58}$

≈ 3.5486

vagyis $\boxed{\theta_{ML} \approx 1.69}$

(5) Egymintás 1-oldali u-próbát kell(ene) végeznünk,
a null-hipotézis $H_0: m \leq 508827$.
Mivel a mintaátlag $\overline{x} = 508825.2 < m$,
a minta <u>megerősíti</u> a hipotézist, ezért azt további
számolás nélkül <u>elfogadjuk</u>.