Stacionárius folyamatok

Székely Balázs

2010. december 7. és 9.

1. Stacionárius és gyengén stacionárius folyamatok
2. Stacionárius folyamat osztályok
   - Stacionárius Markov-láncok
   - Trigonometrikus folyamatok
   - Mozgóátlag-folyamatok $MA(q)$
   - Autoregressziós folyamatok $AR(p)$
   - Autoregressziós és mozgóátlag-folyamatok $ARMA(p,q)$
3. Stacionárius folyamatok spektruma
   - Spektrum értelmezése
   - Spektrál mérték, spektrálsűrűség
   - Példák - Direct számolás
   - Adott spektrál mértékű, adott kovarianciájú Gauss-folyamat
4. Stacionárius folyamatok szűrése - Lineáris szűrők
   - Szűrés spektrálsűrűsége
   - Szűrő név eredete
5. Stacionárius folyamatok előrejelzése
   - Megengedett előrejelzők halmaza
   - A legjobb előrejelző a megengedett előrejelzők halmazában
6. Komlex szám értékű stacionárius folyamatok

Stacionárius és gyengén stacionárius folyamatok

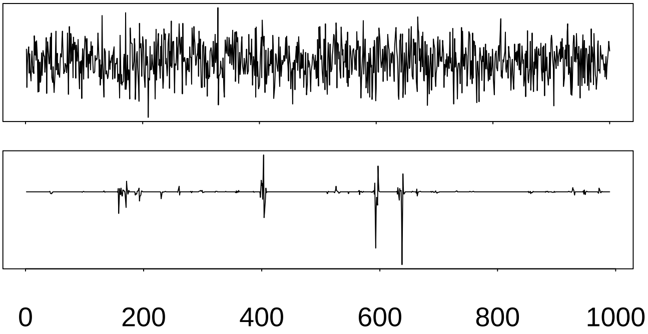
Stacionárius folyamat definíciója, gyengén stacionárius folyamat.
Diszkrét időben, folytonos időben.
Valós és komplex értékű stacionárius folyamatok.

Stacionárius folyamatok alkalmazási területei ∞

- kommunikáció elmélet, elektromos kommunikáció - komplex értékű folyamatok
- közgazdaság (munkanélküliség, nemzeti jövedelem - korrekcióval)
- tőzsde
- ...

Fehérzaj

Felső ábra: fehérzaj = $(\xi_i, i \in \mathbb{Z})$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$.
Alsó ábra: általánosabb fehérzaj = 0 várható értékű, korrelálatlan, azonos, σ^2 szórású valváltozók sorozata. Pl.: $(\eta_n = \xi_n \xi_{n+1} \dots \xi_{n+9}, n \in \mathbb{Z})$. η_n-ek nem függetlenek.



Néhány stacionárius folyamat osztály

- Stacionárius Markov-láncok
- Trigonometrikus folyamatok
- Mozgóátlag-folyamatok $MA(q)$
- Autoregressziós folyamatok $AR(p)$
- Autoregressziós és mozgóátlag-folyamatok $ARMA(p,q)$

Stacionárius Markov-láncok

Ha egy ergodikus (aperiódikus, irreducibilis) Markov-láncot a stacionárius eloszlásából indítunk, akkor a Markov-lánc stacionárius folyamat.

Trigonometrikus folyamatok

Egy frekvenciás

A, B azonos eloszlásúak, várható értékük 0, korrelálatlanok ($\mathbf{E}AB = 0$), szórásnégyzetük σ^2.
Legyen $\omega \in [0, \pi]$ frekvencia rögzített.
$n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ esetén legyen

$$X_n = A\cos(\omega n) + B\sin(\omega n).$$

Mit jelent ez különböző ω-kra?

Várható érték, kovariancia:
$\mathbf{E}X_n = 0, \quad C_X(k) = \mathbf{Cov}(X_n, X_{n+k}) = \mathbf{E}X_nX_{n+k} =$
$\mathbf{E}(A\cos(\omega n) + B\sin(\omega n))(A\cos(\omega(n+k)) + B\sin(\omega(n+k)))$
$= \mathbf{E}(A^2\cos(\omega n)\cos(\omega(n+k)) + B^2\sin(\omega n)\sin(\omega(n+k))) =$
$\sigma^2\cos(\omega n)\cos(\omega(n+k)) + \sigma^2\sin(\omega n)\sin(\omega(n+k))) =$
$\sigma^2\cos(\omega k)$

$(\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b))$

Trigonometrikus folyamatok

Általánosan

Definíció (Trigonometrikus folyamat)

$A_0, A_1, \ldots, A_m$ és $B_1, \ldots, B_m$ korrelálatlanok, várható értékük 0, A_k és B_k szórásnégyzete ugyanaz, σ_k^2. $\omega_1, \ldots, \omega_m$ adott frekvenciák. Ekkor legyen

$$X_n = A_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(A_k \cos(n\omega_k) + B_k \sin(n\omega_k)\right).$$

$\mathbf{Cov}(X_n, X_{n+v}) = \sum_{k=1}^m \sigma_k^2 \cos(v\omega_k)$, azaz

$C_X(v) = \sigma^2 \sum_{k=1}^m \cos(v\omega_k)\frac{\sigma_k^2}{\sigma^2}$, ahol

$\sigma^2 = \sigma^2(X_n) = C_X(0) = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_m^2$.

Tehát az ω_k frekvencia $\frac{\sigma_k^2}{\sigma^2}$ súllyal járul hozzá a kovarianciához.

Ha A_i, B_i-k normálisak, akkor $X_n, n \in \mathbb{Z}$ Gauss-folyamat. Egy gyengén stacionárius Gauss-folyamat erősen is stacionárius.

Folytonos idejű trigonometrikus folyamatok

Definíció (Trigonometrikus folyamat (folytonos időben))

$A_0, A_1, \dots, A_m$ és $B_1, \dots, B_m$ korrelálatlanok, várható értékük 0, A_k és B_k szórásnégyzete ugyanaz, σ_k^2. $\omega_1, \dots, \omega_m$ adott frekvenciák. Ekkor legyen

$$X(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{m} \left(A_k \cos(t\omega_k) + B_k \sin(t\omega_k)\right).$$

$\mathbf{Cov}(X(t), X(t+s)) = \sum_{k=1}^m \sigma_k^2 \cos(s\omega_k)$, azaz

$C_X(s) = \sigma^2 \sum_{k=1}^m \cos(s\omega_k)\frac{\sigma_k^2}{\sigma^2}$, ahol

$\sigma^2 = \sigma^2(X(t)) = C_X(0) = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_m^2$.

Tehát az ω_k frekvencia $\frac{\sigma_k^2}{\sigma^2}$ súllyal járul hozzá a kovarianciához.

Példa

Trigonometrikus folyamatok

$\Phi \sim Unif[0,2\pi]$. Legyen $X_t := \cos(\omega t + \Phi)$, $t \in [0,\infty)$. Mutassuk meg, hogy X gyengén stacionárius. $C_X(h) = ?$ Mutassuk meg, hogy előáll folytonos idejű trigonometrikus folyamatként.

$$\mathbf{E}X_t = \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \phi)\,\mathrm{d}\phi = [\sin(\omega t + \phi)]_0^{2\pi} = 0$$

$$\mathbf{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbf{E}X_t \cdot X_{t+h} = \int_0^{2\pi} \cos(\omega t + \phi)\cos(\omega(t+h) + \phi)\,\mathrm{d}\phi$$

$$\cos(a+\phi) = \cos(a)\cos(\phi) - \sin(a)\sin(\phi)$$

$$\mathbf{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \tfrac{1}{2}\left(\cos(\omega t)\cos(\omega(t+h)) + \sin(\omega t)\sin(\omega(t+h))\right)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\mathbf{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \tfrac{1}{2}\cos(\omega h)$$

Példa

$\Phi \sim Unif[0, 2\pi]$. Legyen $X_t := \cos(\omega t + \Phi)$, $t \in [0, \infty)$.
Mutassuk meg, hogy X gyengén stacionárius. $C_X(h) = ?$.
Mutassuk meg, hogy előáll folytonos idejű trigonometrikus folyamatként.

$Z_1, Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, függetlenek.

$Y_t = Z_1 \cos(\omega t) + Z_2 \sin(\omega t)$ Gauss-folyamat 0 várható értékkel.

Láttuk, hogy ekkor $\mathbf{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = \cos(\omega h)$

Y_t gyengén stac. Mivel Gauss-folyamat, ezért erősen stacionárius is.

(Z_1, Z_2) polárkoordinátákkal felírva: $R = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2}$ és $0 < \Phi \leq 2\pi$.
Ekkor

- $\Phi \sim Unif[0, 2\pi]$
- Y/R erősen stacionárius, mert R nem függ t-től.
- $Y/R = 2\cos(\omega t + \Phi)$

Mozgóátlag-folyamatok $MA(q)$

Definíció (q-ad rendű mozgóátlag-folyamat)

Legyen $\ldots, \xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ *általános fehérzaj, közös* μ *várható értékkel, és* σ^2 *szórásnégyzettel.*
Legyenek $b_0, b_1, \ldots, b_q$ *valós számok. Legyen*

$$X_n = b_0\xi_n + b_1\xi_{n-1} + \cdots + b_q\xi_{n-q}.$$

Ekkor $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ *q-ad rendű mozgóátlag-folyamat.*

X stacionárius folyamat: $\mathbf{E}X_n = \mu(b_0 + b_1 + \cdots + b_q)$

$$\mathbf{Cov}(X_n, X_{n+k}) = \begin{cases} \sigma^2(b_q b_{q-k} + \cdots + b_k b_0) & \text{ha } k \le q \\ 0 & \text{ha } k > q \end{cases}$$

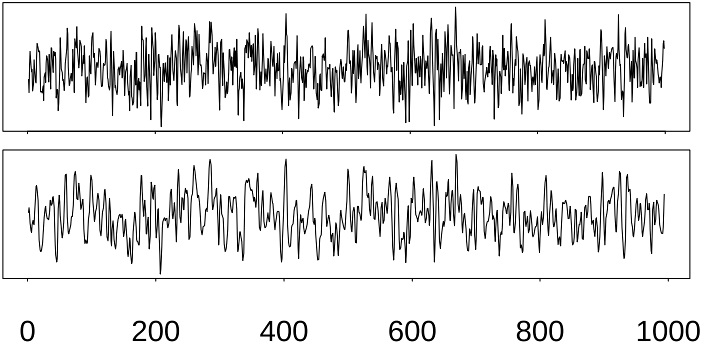
MA folyamatok értékei két példában

ξ fehérzaj folyamat.

MA(1), $X_n = \frac{1}{2}\xi_n + \frac{1}{2}\xi_{n-1}$

MA(6),

$X_n = \xi_n + 6\xi_{n-1} + 15\xi_{n-2} + 20\xi_{n-3} + 15\xi_{n-4} + 6\xi_{n-5} + \xi_{n-6}$



Autoregressziós folyamatok $AR(p)$

$AR(1)$

Definíció (Elsőrendű autoregressziós folyamat)

Legyen $(X_n, n \in \mathbb{Z})$ *stacionárius folyamat. Tfh valamilyen* $|a| < 1$ *valós számra a*

$$\xi_n = X_n - aX_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{Z}$$

fehérzaj folyamatot definiál, közös 0 várható értékkel és σ^2 *szórásnégyzettel.*

Számítsuk ki X_n várható értékét, szórását, és X kovarianciafüggvényét.

$X_n = aX_{n-1} + \xi_n = a(aX_{n-2} + \xi_{n-1}) + \xi_n = a^2X_{n-2} + a\xi_{n-1}) + \xi_n$

indukcióval $X_n = a^k X_{n-k} + \sum_{j=0}^{k-1} a^j \xi_{n-j}$

$X_n = a^k X_{n-k} + \xi_n + a\xi_{n-1} + a^2\xi_{n-2} + \cdots + a^{k-1}\xi_{n-k+1}$

Mi történik, ha $k \to \infty$?

Autoregressziós folyamatok $AR(p)$

$AR(1)$

X_n és $\sum_{j=0}^{k-1} a^j \xi_{n-j}$ eltérése:
$\mathbf{E}\left(X_n - \sum_{j=0}^{k-1} a^j \xi_{n-j}\right)^2 = \mathbf{E}(a^k X_{n-k})^2 = a^{2k}\mathbf{E}X_{n-k}^2$
$(X_n = a^k X_{n-k} + \xi_n + a\xi_{n-1} + a^2\xi_{n-2} + \cdots + a^{k-1}\xi_{n-k+1})$
$a^{2k}\mathbf{E}X_{n-k}^2 = a^{2k}\mathbf{E}X_0^2 \to 0$ amint $k \to \infty$.
Így négyzetes középben vett határértékben a

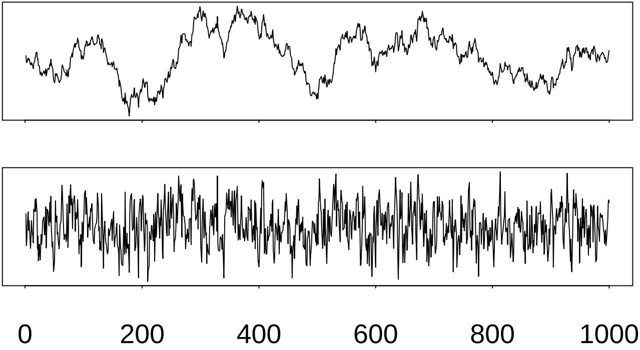
$$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \xi_{n-j}$$

határérték létezik.
Ez az autoregressziós folyamat mozgóátlag-folyamatként való előállítása.

Autoregressziós folyamatok $AR(1)$

Grafikonok, két példa

$\mathbf{AR(1)}$: $X_n = 0.99X_{n-1} +$ fehérzaj, $X_n = 0.5X_{n-1} +$ fehérzaj



Autoregressziós folyamatok $AR(1)$

Várható érték, szórás, kovariancia

Az $X_n = \sum_{j=0}^{\infty} a^j \xi_{n-j}$ előállítás segítségével számoljuk ki a árható értékét, szórásnégyzetét, kovarianciáját:

$\mathbf{E}X_n = \lim_{k\to\infty} \mathbf{E} \sum_{j=0}^{k-1} a^j \xi_{n-j} = 0$

$\sigma_X^2 = \mathbf{E}X_n^2 = \lim_{k\to\infty} \mathbf{E} \left(\sum_{j=0}^{k-1} a^j \xi_{n-j}\right)^2 =$

$\lim_{k\to\infty} \mathbf{E} \left(\sum_{j=0}^{k-1} a^{2j} \xi_{n-j}^2\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k-1} a^{2j} \sigma^2 = \dfrac{\sigma^2}{1-|a|^2}$

$\mathbf{Cov}(X_n, X_{n+k}) = \mathbf{E}X_n X_{n+k} = ?$

$X_{n+k} = a^k X_n + \sum_{j=0}^{k-1} a^j \xi_{n+k-j}$

$\mathbf{E}X_n X_{n+k} = a^k \mathbf{E}X_n^2 + \mathbf{E}\left(X_n \cdot \sum_{j=0}^{k-1} a^j \xi_{n+k-j}\right)$

$X_n = \xi_n + a\xi_{n-1} + a^2\xi_{n-2} + \ldots$. Így X_n $\xi_n, \xi_{n-1}, \xi_{n-2} + \ldots$-től függ, ezek pedig korrelálatlanok a $\xi_{n+k}, \ldots, \xi_{n+1}$ valváltozókkal.

Így $C_X(k) = \mathbf{E}X_n X_{n+k} = a^k \mathbf{E}X_n^2 = a^k \sigma_X^2 = \frac{a^k \sigma^2}{1-|a|^2}$.

Autoregressziós folyamatok $AR(p)$

Általános definíció, mozgóátlagos előállítás

$AR(1)$ esetén $X_n = aX_{n-1} + \xi_n$ alakba írható. Ez általánosan

Definíció (p-ed rendű autoregressziós folyamat)

Ha X_n a következő alakban írható
$X_n = a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2} + \cdots + a_p X_{n-p} + \xi_n$,
ahol a_i-k valós számok, ξ pedig fehérzaj. Ekkor X p-ed rendű autoregressziós folyamat.

Tétel ($AR(p)$ MA folyamatként)

Ha az $x^p - a_1 x^{p-1} - \cdots - a_p = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökeinek abszolut értéke kisebb, mint 1 ($|x_1|, \ldots, |x_p| < 1$), akkor ξ_n és $(X_{n-1}, \ldots, X_{n-p})$ korrelálatlanok.
Ekkor X_n felírható mozgóátlag-folyamatként
$X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \xi_{n-j} = \delta_0 \xi_n + \delta_1 \xi_{n-1} + \delta_2 \xi_{n-2} \ldots$, *megfelelő δ_i valós számokkal.*

Autoregressziós és mozgóátlag-folyamatok $ARMA(p,q)$

Legyen ξ fehérzaj.

$$X_n = \underbrace{a_1 X_{n-1} + \cdots + a_p X_{n-p}}_{AR(p)} + \underbrace{b_0 \xi_n + \cdots + b_q \xi_{n-q}}_{MA(q)}$$

Tétel ($ARMA(p,q)$ MA folyamatként)

Ha az $x^p - a_1 x^{p-1} - \cdots - a_p = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökeinek abszolut értéke kisebb, mint 1 ($|x_1|, \ldots, |x_p| < 1$), akkor az X ARMA folyamat felírható mozgóátlag-folyamatként $X_n = \sum_{j=0}^{\infty} \delta_j \xi_{n-j} = \delta_0 \xi_n + \delta_1 \xi_{n-1} + \delta_2 \xi_{n-2} \ldots$, megfelelő δ_i valós számokkal.

Paraméterek becslése

Autoregressziós és mozgóátlag-folyamatok $ARMA(p,q)$

...

Stacionárius folyamatok spektruma

Tekintsük a következő trigonometrikus modellt korábbról:
$A_0, A_1, \dots, A_m$ és $B_1, \dots, B_m$ korrelálatlanok, várható értékük 0, A_k és B_k szórásnégyzete ugyanaz, σ_k^2.
$\omega_1, \dots, \omega_m$ adott frekvenciák. Ekkor legyen
$X_n = A_0 + \sum_{k=1}^m \left(A_k \cos(n\omega_k) + B_k \sin(n\omega_k)\right)$
$\mathbf{Cov}(X_n, X_{n+v}) = \sum_{k=1}^m \sigma_k^2 \cos(v\omega_k)$
$C_X(v) = \sigma^2 \sum_{k=1}^m \cos(v\omega_k)\frac{\sigma_k^2}{\sigma^2}$, ahol
$\sigma^2 = \sigma^2(X_n) = C_X(0) = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_m^2$.
Azaz az ω_k frekvencia $\frac{\sigma_k^2}{\sigma^2}$ súllyal járul hozzá a kovarianciához.
Ezt általánosítsuk!

Stacionárius folyamatok spektruma

Tétel (Spektrál mérték létezése (Herglotz))

Legyen $C(k), k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ *adott függvény. A következő két állítás ekvivalens:*

A) $C(k)$ *egy valós értékű,* ***0 várható értékű*****, 1** ***szórású*** *stacionárius folyamat kovarianciafüggvénye*

B) *Létezik olyan szimmetrikus* F *valószínűség eloszlás a* $[-\pi, \pi]$ *intervallumon, amelyre*

$$C(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\omega)\,\mathrm{d}F(\omega).$$

Stacionárius folyamatok spektruma

Spektrálsűrűség

Ha $a = (a_k, k \in \mathbb{Z})$ egy sorozat ($\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty$), akkor Fourier-transzformáltja:

$$f_a(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega} a_k$$

Ha $C(k), k = 0, 1, 2, \ldots$ egy kovarianciafüggvény, akkor Fourier-transzformáltja:

$$f_C(\omega) = \frac{1}{2\pi} C(0) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} C(k) \cos(k\omega), \quad -\pi \le \omega \le \pi.$$

Ez akkor (egyenletesen) konvergens (=értelmes),

Állítás (Spektrálsűrűség létezése)

ha $C(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty} |C(k)| < \infty$.
Ekkor az $F(\omega)$ spektrál mérték „deriválható”:

$$C(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\omega)\, \mathrm{d}F(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k\omega) f_C(\omega)\, \mathrm{d}\omega.$$

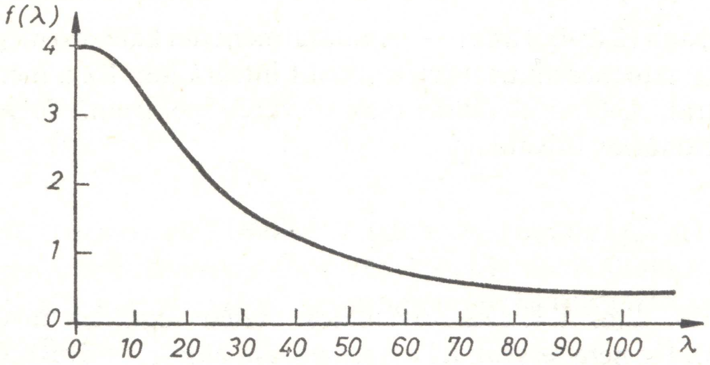
Spektrálsűrűség - Direkt számolás

Példák

- ξ_n fehérzaj σ^2 szórásnégyzettel. $C(0) = \sigma^2$, különben $C(i) = 0$. Ekkor
$$f_\xi(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi$$
- $MA(1)$, $X_n = \xi_n - b\xi_{n-1}$. $C_X(0) = \sigma^2(1+b^2)$, $C_X(1) = -b\sigma^2$, különben $C_X(i) = 0$. Ekkor
$$f_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi(1+b^2)} - \frac{b\sigma^2}{\pi}\cos(\omega)$$
- $AR(1)$, $X_n = aX_{n-1} + \xi_n$. $C_X(k) = a^k\sigma_X^2$, ha $k = 0, 1, 2, \ldots$.
$$f_X(\omega) = \frac{\sigma_X^2}{2\pi} + \frac{\sigma_X^2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(k\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi(1 - 2a\cos(\omega) + a^2)}$$
$(\sigma_X^2 = \frac{\sigma^2}{1-|a|^2})$

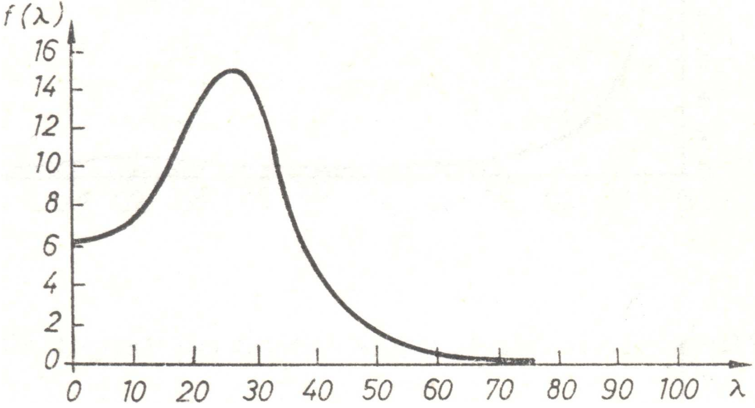
Spektrálsűrűség példák grafikonnal
1/3

$AR(1)$, $X_n = 0,5X_{n-1} + \xi_n$
(A grafikonok a π %-át mutatják, azaz pl. 50-nél a spektrálsűrűség $\pi/2$-beli értéke van feltüntetve.)



Spektrálsűrűség példák grafikonnal
2/3

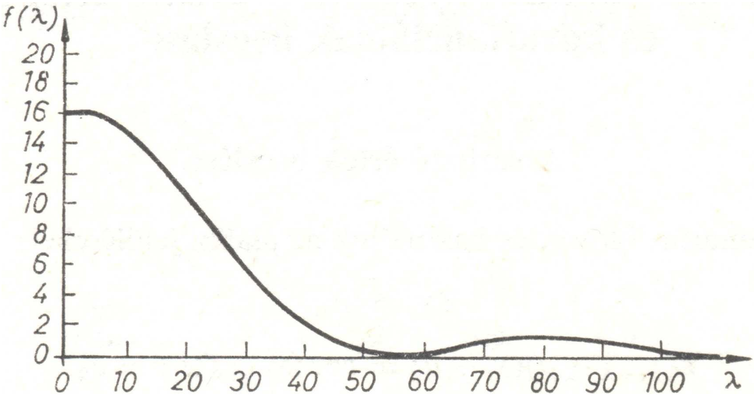
$$AR(4), X_n = 1.4X_{n-1} - 1,1X_{n-2} + 0,4X_{n-3} - 0,1X_{n-4} + \xi_n$$



$\frac{\pi}{4}$-ben van maximuma,
tehát a folyamat ciklusainak hossza kb. 8.

Spektrálsűrűség példák grafikonnal
3/3

$MA(3)$, $X_n = \xi_n + \xi_{n-1} + \xi_{n-2} + \xi_{n-3}$



Spektrálsűrűség - Indirekt, hatékony számolás

Később!
Amint tudjuk, mi az, hogy szűrés.

Adott spektrál mértékű, adott kovarianciájú Gauss-folyamat

Ha $F(\omega)$ ugrásos

Mivel F szimmetrikus, ezért ha ω-ban van ugrás, akkor $-\omega$-ban is. Tehát, ha $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$-ben és 0-ban van ugrás (így $-\omega_m, -\omega_{m-1}, \ldots, -\omega_1$-ben is van ugrás), és az ugrás nagyságok rendre $p_1, p_2, \ldots, p_m$, illetve p_0 akkor a keresett Gauss-folyamat a már ismert:

$A_0, A_1, \ldots, A_m$ és $B_1, \ldots, B_m$ korrelálatlanok, várható értékük 0, A_k és B_k szórásnégyzete ugyanaz, $2p_k$, ha $k = 1, \ldots, m$ és p_0 ha $k = 0$.

$X_n = A_0 + \sum_{k=1}^{m} (A_k \cos(n\omega_k) + B_k \sin(n\omega_k))$

$\mathbf{Cov}(X_n, X_{n+v}) = p_0 + \sum_{k=1}^{m} 2p_k \cos(v\omega_k)$

$C_X(v) = \sum_{k=1}^{m} \cos(s\omega_k) 2p_k$, ahol

$p_m + \cdots + p_1 + p_0 + p_1 + \cdots + p_m = 1$

Adott spektrál mértékű, adott kovarianciájú Gauss-folyamat

Legyen $C(k) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(k\omega)\,\mathrm{d}F(\omega)$ adott kovarinacia függvény szimmetrikus $F(\omega)$ valószínűség eloszlással a $[-\pi, \pi]$ intervallumon.
Írjunk fel olyan Gauss-folyamatot, amelynek C kovarianciafüggvénye.

Tegyük fel, hogy $F(\omega)$ folytonos.

Legyen $B_1(\omega), \omega \in [0, \infty)$ és $B_2(\omega), \omega \in [0, \infty)$ két korrelálatlan standard Brown mozgás. Tekintsük ezek következő idő-átparaméterezését:
$Z_i(\omega) = B_i(2\sigma^2(F(\omega) - F(0))), \omega \in [0, \infty)$. Így
$\mathbf{E}(Z_i(\omega)^2) = 2\sigma^2(F(\omega) - F(0)) = \sigma^2(F(\omega) - F(-\omega))$.
Ekkor $X_n = \int\limits_0^{\pi} \cos(n\omega)\,\mathrm{d}Z_1(\omega) + \int\limits_0^{\pi} \sin(n\omega)\,\mathrm{d}Z_2(\omega)$ stacionárius folyamat, C kovarianciával.

Adott spektrál mértékű, adott kovarianciájú Gauss-folyamat
Ha $F(\omega)$ folytonos

Ekkor $X_n = \int_0^\pi \cos(n\omega)\,\mathrm{d}Z_1(\omega) + \int_0^\pi \sin(n\omega)\,\mathrm{d}Z_2(\omega)$ stacionárius folyamat, C kovarianciával.

Ellenőrizzük: $\mathbf{E}(X_k) = 0$

$$C_X(k) = \mathbf{E}(X_n X_{n+k}) = \mathbf{E}\left(\int_0^\pi \cos(n\omega)\,\mathrm{d}Z_1(\omega) + \int_0^\pi \sin(n\omega)\,\mathrm{d}Z_2(\omega)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\int_0^\pi \cos((n+k)\omega)\,\mathrm{d}Z_1(\omega) + \int_0^\pi \sin((n+k)\omega)\,\mathrm{d}Z_2(\omega)\right) =$$

$$\mathbf{E}\left(\int_0^\pi \cos(n\omega)\cos((n+k)\omega)\,\mathrm{d}Z_1(\omega) + \int_0^\pi \sin(n\omega)\sin((n+k)\omega)\,\mathrm{d}Z_2(\omega)\right) =$$

$$\int_0^\pi \cos(n\omega)\cos((n+k)\omega)\sigma^2\,\mathrm{d}F(\omega) + \int_0^\pi \sin(n\omega)\sin((n+k)\omega)\sigma^2\,\mathrm{d}F(\omega) =$$

$$\sigma^2\int_0^\pi \Big(\cos(n\omega)\cos((n+k)\omega) + \sin(n\omega)\sin((n+k)\omega)\Big)\,\mathrm{d}F(\omega) =$$

$$\sigma^2\int_0^\pi \cos(k\omega)\,\mathrm{d}F(\omega) = C(k).$$

Stacionárius folyamatok szűrése - Lineáris szűrők

Diszkrét idejű stacionárius folyamat szűrése

Legyen $X = (X_n, n \in \mathbb{Z})$ egy gyengén stacionárius folyamat. Legyen továbbá $a_k, k \in \mathbb{Z}$ valós számok sorozata. Tfh, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^2 < \infty$. Ekkor az

$$Y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X_{n-k}$$

folyamat az X folyamat (a-val szűrt) lineáris szűrője, jelben $Y = a * X$.

Folytonos idejű eset (csak említés)

Legyen $X = (X(t), t \in \mathbb{R})$ egy gyengén stacionárius folyamat. Legyen $h(t)$ egy valós függvény, és $\int_{-\infty}^{\infty} h^2(t)\,\mathrm{d}t < \infty$. Ekkor

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t-s)h(s)\,\mathrm{d}s$$

folyamat az X folyamat (h-val szűrt) lineáris szűrője.

Stacionárius folyamatok szűrése - Lineáris szűrők
Miért lineáris?

Ha $X_n^{(1)}$ és $X_n^{(2)}$ stacionárius folyamat, akkor tetszőleges fix a-val való szűrésre igaz, hogy

$$a * (\alpha \cdot X^{(1)} + \beta \cdot X^{(2)}) = \alpha \cdot a * X^{(1)} + \beta \cdot a * X^{(2)}$$

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (\alpha X_{n-k}^{(1)} + \beta X_{n-k}^{(2)}) = \alpha \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X_{n-k}^{(1)} + \beta \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X_{n-k}^{(2)} \right)$$

Stacionárius folyamatok szűrése - Lineáris szűrők
Miért szűrő?

Később!

Amint tudjuk a spektrálsűrűségét a szűrt folyamatnak.

Szűrés spektrálsűrűsége

A szűrt folyamat kovarianciája ($v = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$):

$$C_Y(v) = \mathbf{Cov}(Y_n Y_{n+v}) =$$
$$\mathbf{Cov}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X_{n-k}, \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X_{n+v-k}\right) =$$
$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_r a_s \mathbf{Cov}(X_{n-r}, X_{n+v-s}) =$$
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_r a_s C_X(v - s + r)$$

$C_Y(v), v = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ sorozat Fourier-transzformáltja, $Y = a * X$ spektrálsűrűsége:

$$f_Y(\omega) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\omega} C_Y(v) =$$
$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{iv\omega} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_r a_s C_X(v - s + r)$$

$$e^{iv\omega} v = e^{i(v-s+r)\omega} e^{is\omega} e^{-ir\omega}$$

$$f_Y(\omega) =$$
$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-ir\omega} a_r \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s e^{is\omega} \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{i(v-s+r)\omega} C_X(v-s+r) =$$
$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{-ir\omega} a_r \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s e^{is\omega} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik\omega} C_X(k) =$$
$$A(-\omega)A(\omega)f_X(\omega) = f_X(\omega)|A(\omega)|^2, \text{ ahol } A(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega}.$$

Több szűrő egymás után

Legyen X egy stacionárius folyamat, és $a = (a_n, n \in \mathbb{Z})$, $b = (b_n, n \in \mathbb{Z})$, $c = (c_n, n \in \mathbb{Z})$ (négyzetesen összegezhető) sorozatok. Ekkor a, b, c-vel egymás után szűrt folyamat, $Y = c * b * a * X$, spektrálsűrűsége:

$$f_Y(\omega) = f_X(\omega)|A(\omega)|^2|B(\omega)|^2|C(\omega)|^2,$$

ahol $A(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\omega}$, $B(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{ik\omega}$, $C(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega}$.

$ARMA(p,q)$ spektrálsűrűsége

Szűrés spektrálsűrűsége

Legyen X egy $ARMA(p,q)$ folyamat, azaz X kielégíti a

$$X_n - \sum_{s=1}^{p} a_s X_{n-s} = \sum_{r=0}^{q} b_r \xi_{n-r}$$

$$(\Leftrightarrow X_n = a_1 X_{n-1} + \cdots + a_p X_{n-p} + b_0 \xi_n + \cdots + b_q \xi_{n-q}))$$

egyenlőséget. Ha $Y_n = \sum_{s=0}^{p} a_s X_{n-s}$, akkor $f_Y(\omega) = f_X(\omega)|A(\omega)|^2$, ahol $A(\omega) = 1 - \sum_{s=0}^{p} e^{is\omega} a_s$. Továbbá, $Y = \sum_{r=0}^{q} b_r \xi_{n-r}$, azaz $f_Y(\omega) = \sigma^2 |B(\omega)|^2$, ahol $B(\omega) = \sum_{r=0}^{q} e^{ir\omega} b_r$. Tehát, $f_X(\omega)|A(\omega)|^2 = \frac{\sigma^2}{2\pi}|B(\omega)|^2$, amiből

$$f_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|B(\omega)|^2}{|A(\omega)|^2} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \frac{b_0 + b_1 e^{i\omega} + \cdots + b_q e^{iq\omega}}{1 - a_1 e^{i\omega} - \cdots - a_p e^{ip\omega}} \right| .$$

Stacionárius folyamatok szűrése - Lineáris szűrők
Miért szűrő?

Tekintsük az X stacionárius folyamat következő szűrését:

$$Y_n = \frac{1}{2}X_{n+12} + X_n + \frac{1}{2}X_{n-12}.$$

Azaz $a_{12} = \frac{1}{2}$, $a_0 = 1$, $a_{-12} = \frac{1}{2}$, különben $a_i = 0$.
Számítsuk ki Y spektrálsűrűségét.
Az a Fourier-transzformáltja:
$A(\omega) = e^{i12\omega}\frac{1}{2} + 1 + e^{-i12\omega}\frac{1}{2} = 1 + \cos(12\omega)$. Tehát $A(\frac{\pi}{12}) = 0$, azaz X-nek a spektrumából a kiszűri a $\frac{\pi}{12}$ frekvenciát, azaz Y-nak a kovarianviájában a $\frac{\pi}{12}$ frekvencia semmivel nem járul hozzá a kovarianciához.
(Szezonális trend kiszűrése...)

Frekvenciák kiemelése

X egy stacionárius folyamat f_X spektrálsűrűséggel.
$Y_n := X_n - X_{n+1}$, akkor $a_0 = 1$, $a_{-1} = -1$, különben $a_i = 0$.
$Y = a * X$ spektrálsűrűsége f_Y, amire $f_Y(\omega) = f_X(\omega)|1 - e^{i\omega}|^2$.
Ha ugyanígy szűrűnk r-szer, azaz vesszük
$Y^{(r)} = \underbrace{a * \cdots * a}_{r \text{ db}} * X$, akkor $Y^{(r)}$ spektrálsűrűsége: $f_r(\omega) =$
$f_X(\omega)|1 - e^{i\omega}|^{2r} = f_X(\omega)|e^{i\frac{1}{2}\omega} - e^{-i\frac{1}{2}\omega}|^{2r} = f_X(\omega)2^{2r}(\sin(\frac{1}{2}\omega)^{2r} =$
$f_X(\omega)|e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega}|^r = f_X(\omega)2^r(1 - \cos(\omega))^r$.
Kiemeli a magas frekvenciákat.

Tekintsük a $Z_n := X_n + X_{n+1}$ szűrőt, $a_0 = 1$, $a_{-1} = 1$, különben $a_i = 0$. r-szer alkalmazva a kapott szűrő $Z^{(r)} = a * \cdots * a * X$ spektrálsűrűsége: $f_r(\omega) = f_X(\omega)|1 + e^{i\omega}|^{2r} =$
$f_X(\omega)|e^{i\frac{1}{2}\omega} + e^{-i\frac{1}{2}\omega}|^{2r} = f_X(\omega)2^{2r}(\cos(\frac{1}{2}\omega)^{2r} =$
$f_X(\omega)|e^{i\omega} + 2 + e^{-i\omega}|^r = f_X(\omega)2^r(1 + \cos(\omega))^r$.
Kiemeli az alacsony frekvenciákat.

Példa szűrésre

ξ gaussi fehér zaj folyamat. Legyen X a fehérzaj következő szűrője:

$$X_n = \xi_{n-2} + 4\xi_{n-1} + 6\xi_n + 4\xi_{n+1} + \xi_{n+2}$$

$a_2 = 1, a_1 = 4a_0 = 6, a_{-1} = 4, a_{-2} = 1$, különben $a_i = 0$.
Számoljuk ki a spektrumát!
$A(\omega) = e^{i2\omega} + e^{i\omega}4 + 6 + e^{-i\omega}4 + e^{-i2\omega} = 2\cos(2\omega) + 8\cos(2\omega) + 6$.
$f_\xi(\omega) = C_\xi(0) = \sigma_\xi^2$.
$f_X(\omega) = \sigma_\xi^2(2\cos(2\omega) + 8\cos(2\omega) + 6)^2$.

Az autokovariancia: $C_X(k) = \begin{cases} 70\sigma^2 & k = 0 \\ 56\sigma^2 & k = 1 \\ 28\sigma^2 & k = 2 \\ 8\sigma^2 & k = 3 \\ \sigma^2 & k = 4 \\ 0 & k \geq 5 \end{cases}$

Stacionárius folyamatok előrejelzése

Egy X stacionárius folyamat X_n értékét szeretnénk előrejelezni.

Legyen H a megengedett előrejelzők halmaza. Feltesszük, hogy

1. H lineáris tér: ha $\hat{X}_1$ és $\hat{X}_2$ megengedett előrejelző, akkor a lineáris kombinációjuk is az.
2. H négyzetes középben vett konvergenciára zárt.

Például:

- (lineáris regresszió) X valváltozót becslése Y-nal. X-et $aY + b$ alakban közelítjük. Ekkor H az összes $aY + b$ alakú valváltozóból áll.
- X stacionárius folyamat. X_n előrejelezése $X_{n-1}, \dots, X_{n-p}$ p-hosszú múltjával lineáris előrejelzőkkel: $H = \alpha_1 X_{n-1} + \cdots + \alpha_p X_{n-p}$, α_i-k tetszőleges valós számok.

A H-beli legjobb előrejelző X^*, ha $\mathbf{E}(X - X^*)^2$ előrejelzési hiba minimális a H halmazon: $\hat{X} \in H \Rightarrow \mathbf{E}(X - X^*)^2 \leq \mathbf{E}(X - \hat{X})^2$

Stacionárius folyamatok előrejelzése

Tétel (Előrejelzési tétel)

Ha H lineáris tér, akkor X^* a legjobb előrejelző a H halmazban, ha minden $U \in H$ előrejelzőre: $\mathbf{E}(X - X^*)U = 0$.

Stacionárius folyamatokra véges hosszú múlttal való előrejelzés esetén: Határozzuk meg azon $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ számokat, amelyre $X_n^* = \alpha_1 X_{n-1} + \cdots + \alpha_p X_{n-p}$ esetén a $\mathbf{E}(X_n - X_n^*)^2$ előrejelzési hiba minimális.

H lineáris előrejelzők: $U = u_1 X_{n-1} + \cdots + u_p X_{n-p}$ $u_i \in \mathbb{R}$.

Keressük azt az X_n^*-ot, amelyre $\mathbf{E}(X_n - X_n^*)U = 0$. Mivel H lineáris, ezért

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_n - X_n^*)X_{n-1} &= 0 \\
\mathbf{E}(X_n - X_n^*)X_{n-2} &= 0 \\
&\ldots \\
\mathbf{E}(X_n - X_n^*)X_{n-p} &= 0
\end{aligned}$$

a minimum feltétel X_n^*-ra.

Előrejelzés **véges** hosszú múlttal

Ezt a feltételt kiírva p egyenletet kapunk:

$$\mathbf{E}\left((X_n - (\alpha_1 X_{n-1} + \cdots + \alpha_p X_{n-p})X_{n-i})\right), \quad i = 1, \ldots, p.$$

$$\begin{aligned}
C(1) &= \alpha_1 C(0) + \alpha_2 C(1) + \cdots + \alpha_p C(p-1), \\
C(2) &= \alpha_1 C(1) + \alpha_2 C(2) + \cdots + \alpha_p C(p-2), \\
C(3) &= \alpha_1 C(2) + \alpha_2 C(3) + \cdots + \alpha_p C(p-3), \\
\ldots \\
C(p) &= \alpha_1 C(p-1) + \alpha_2 C(p-2) + \cdots + \alpha_p C(0).
\end{aligned}$$

Azaz $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ megoldása a lineáris egyenletrendszernek.
$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_p = 1)$

Előrejelzés **végtelen** hosszú múlttal

Keressük X_n legkisebb négyzetes értelemben vett optimális előrejelzőjét

$$X_n^* = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k X_{n-k} \tag{1}$$

alakban!
(Nem biztos, hogy ilyen létezik.)
Átalakítások után ismét oda jutunk, hogy a fentihez hasonló lináris egyenletrendszert kell megoldani $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ végetelen ismeretlenre:

$$C(k) = \alpha_1 C(k-1) + \alpha_2 C(k-2) + \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Ha létezik megoldás, amire (1) konvergál négyzetes középben, akkor megtaláltuk a legjobb lineáris előrejelzőt.

Stacionárius folyamatok előrejelzése

Példa

Az X gyengén stacionárius folyamat kovarianciafüggvénye:

$$C(v) = \begin{cases} 1 & v = 0 \\ \lambda/(1+\lambda^2) & |v| = 1 \\ 0 & |v| > 1 \end{cases}$$

$(0 < \lambda < 1)$. Az előbbi (2) egynletrendszer most

$$\begin{aligned} \lambda &= (1+\lambda^2)\alpha_1 + \lambda\alpha_2 \\ 0 &= \lambda_{k-1} + (1+\lambda^2)\alpha_k + \lambda\alpha_{k+1}, \quad k = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

A megoldás $\alpha_k = -(-1)^k$, $k = 1, 2, \ldots$, azaz

$$X_n^* = \lambda X_{n-1} - \lambda^2 X_{n-2} + \lambda^3 X_{n-3} - \ldots.$$

A teljes múlt benne van az előrejelzőben.

Diszkrét idejű komplex értékű stacionárius folyamatok spektruma

$X_n, n \in \mathbb{Z}$ $\mathbb{C}$ értékű stacionárius folyamat,
$C(v) = \mathbf{E}(X_n - \mathbf{E}X_n)\overline{(X_{n+v} - \mathbf{E}X_{n+v})}$ kovarianciával.
$C(-v) = \overline{C(v)}$.

Tétel (Spektrál mérték létezése)

Legyen $C(v), v \in \mathbb{Z}$ adott függvény. A következő két állítás ekvivalens:

A) *$C(v)$ egy kopmlex értékű, **0 várható értékű**, **1 szórású**, stacionárius folyamat kovarianciafüggvénye*

B) $C(0) = 1$, $C(-v) = \overline{C(v)}$, $C(v)$ *pozitív szemidefinit*

C) *Létezik olyan (nem feltétlenül szimmetrikus) F valószínűség eloszlás a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, amelyre*

$$C(v) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{it\omega}\, \mathrm{d}F(\omega).$$

Folytonos idejű komplex értékű stacionárius folyamatok spektruma

$X_t, t \in \mathbb{R}$ $\mathbb{C}$ értékű stacionárius folyamat,
$C(t) = \mathbf{E}(X_s - \mathbf{E}X_s)\overline{(X_{s+t} - \mathbf{E}X_{t+s})}$ kovarianciával.
$C(-t) = \overline{C(t)}$.

Tétel (Spektrál mérték létezése (Bochner-Hincsin))

Legyen $C(t), t \in \mathbb{R}$ adott függvény, amely a 0-ban folytonos. A következő két állítás ekvivalens:

- A) *$C(t)$ egy valós értékű, **0 várható értékű**, **1 szórású**, stacionárius folyamat kovarianciafüggvénye*
- B) *$C(t)$ pozitív szemidefinit*
- C) *Létezik olyan F valószínűség eloszlás a $(-\infty, \infty)$ intervallumon, amelyre*

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega}\, \mathrm{d}F(\omega).$$

Adott spektrál mértékű, adott kovarianciájú Gauss-folyamat

Ha $F(\omega)$ folytonos

Adott $C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \, \mathrm{d}F(\omega)$.

B_1 és B_2 két korrelálatlan standard Brown-mozgás.

$Z(\omega) = B_1(F(\omega) - F(0))$, ha $\omega \geq 0$ és $Z(\omega) = B_2(F(0) - F(\omega))$, ha $\omega < 0$

$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \, \mathrm{d}Z(\omega)$ jó lesz: $C_X(t) = C(t)$.

Referenciák

- Karlin-Taylor: Sztochasztikus folyamatok, Gondolat, 1985.
- Tusnády-Ziermann: Idősorok analízise, Műszaki Könyvkiadó, 1986.
- T. W. Anderson: The Statistical Analysis of Time Series, John Wiley & Sons, 1971.
- Time Series Analysis by Richard A. Lockhart