

# Sztochasztika 2 ZH

2012. november 29. 18:00

Felsőbb matematika tárgy, informatikus MSc.

Munkaidő: 60 perc.

1. Egy sztochasztikus algoritmus működése során processzek futnak le. Minden processz - a többtől függetlenül - vagy kilép újabb processzek létrehozása nélkül (ennek valószínűsége legyen  $q = \frac{1}{3}$ ), vagy *két új processzt* indít, mielőtt kilépne (ennek valószínűsége legyen  $p = \frac{2}{3}$ ). Nevezzük ezeket a processzeket az ő gyermekeinek. Kezdetben 1 processz indul. Legyen  $Z_k$  a processzek száma a  $k$ -adik „generációban”, ahol az első processz egyedül alkotja a 0-dik generációt.
  - (a) Határozzuk meg  $Z_2$  generátorfüggvényét.
  - (b) Mennyi a valószínűsége, hogy a harmadik generációban már nem indul processz?
  - (c) Mennyi a harmadik generáció-beli processzek számának várható értéke?
  - (d) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az algoritmus előbb-utóbb legfut - vagyis hogy az összes induló processzek száma véges?
2. Mórlickának egy vizsgaidőszakban 200 villamosmérnök és 100 informatikus hallgató vizsgáját kell kijavítania. Az egyes vizsgák javításával eltöltött idők véletlenek és függetlenek egymástól, de Mórlicka egy villamosmérnök vizsgára semmiképpen sem szán többet 15 percnél, egy informatikus vizsgára pedig 10 percnél.

Mórlickának a 300 vizsga kijavítása sok év átlagában 24 órájába szokott kerülni. Adjunk becslést annak a valószínűségére, hogy a most következő vizsgaidőszakban több mint 30 órát tölt majd el vele.
3. Pistike munkahelyén a ranglétrának 5 fokozata van. Pistike minden hónap végén, az előzményektől függetlenül  $\frac{2}{6}$  valószínűséggel egyet feljebb lép (hacsak nem már legfelül van),  $\frac{1}{2}$  valószínűséggel egyet lecsúszik (hacsak nem már legalul van), a maradék valószínűséggel pedig megtartja a fokozatát. (Az előléptetésekről ill. lefokzásokról a cégnél kockadobással döntenek.) Kezdetben persze Pistike legalulról indul. A havi fizetése a ranglétrán elfoglalt helyétől függ: a legalsó (1-es) lépcsőfokon 100 peták, fölötte a 2.-5. lépcsőfokon rendre 150, 200, 300 ill. 600 peták. Jelölje  $X_n$  a Pistike ranglétrán elfoglalt lépcsőfokának számát  $n$  hónap elteltével.
  - (a) Modellezzük  $X_n$ -et Markov láncsal, adjuk meg az állapotteret és az átmenetmátrixot.
  - (b) Mennyi a valószínűsége, hogy 3 hónap elteltével Pistike éppen a legalsó lépcsőn áll?
  - (c) Hosszú idő elteltével mennyi annak a valószínűsége, hogy Pistike a ranglétra csúcsán van?
  - (d) Mennyi lesz Pistike átlagos havi fizetése hosszú távon?