① A munkahelyi leveleket, a magánleveleket és a spam-et külön-külön Poisson-folyamatokkal modellezzük, amik egymástól függetlenek. Ha az időt órában mérjük, akkor a munkahelyi levél-folyamat rátája $\lambda_{Hiv} = \frac{1}{2}$

a magánlevél-folyamat rátája $\lambda_{Magán} = \frac{3}{2}$

a spam-folyamat rátája $\lambda_{Spam} = 1$.

a.) Legyen $X_{[10;18]}$ a 10 és 18 óra között érkező munkahelyi levelek száma. $\Delta t = 8$, az intervallum hossza, így

$$X_{[10;18]} \sim Poi(\lambda_{Hiv} \cdot \Delta t) = Poi(4),$$

vagyis $\boxed{\mathbb{P}(X_{[10;18]} = 3) = e^{-4}\frac{4^3}{3!} \approx 0.19537}$

b.) Legyen $X_{[10;12]}$, $Y_{[10;12]}$ és $Z_{[10;12]}$ a hivatalos, magán ill. spam emailek száma 10 és 12 óra között, és legyen $U := X_{[10;12]} + Y_{[10;12]} + Z_{[10;12]}$ az összes levél száma.

$$X_{[10;12]} \sim Poi(2 \cdot \lambda_{Hiv}) = Poi(1)$$

$$Y_{[10;12]} \sim Poi(2 \cdot \lambda_{Magán}) = Poi(3)$$

$$Z_{[10;12]} \sim Poi(2 \cdot \lambda_{Spam}) = Poi(2)$$

$\boxed{\text{ÉS FÜGGETLENEK}}$

$\Longrightarrow U \sim Poi(1+3+2) = Poi(6)$

vagyis $\boxed{\mathbb{P}(U = 4) = e^{-6}\frac{6^4}{4!} \approx 0.13385}$

1 – folytatás –

c.) Az előző pont jelöléseivel

$$P = \mathbb{P}\left(X_{[10;12]} + Y_{[10;12]} + Z_{[10;12]} = 4 \text{ és } Z_{[10;12]} = 0\right) = ?$$

Ezt írjuk át úgy, hogy

$$P = \mathbb{P}\left(X_{[10;12]} + Y_{[10;12]} = 4 \text{ és } Z_{[10;12]} = 0\right) = ?$$

Ez az átírás azért jó, mert Z független $X+Y$-tól, továbbá $V := X_{[10;12]} + Y_{[10;12]} \sim Poi(1+3) = Poi(4)$

$$\Rightarrow P = \mathbb{P}(V=4) \cdot \mathbb{P}(Z_{[10;12]} = 0) = e^{-4}\frac{4^4}{4!} \cdot e^{-2}\frac{2^0}{0!} = e^{-4}\frac{4^4}{4!}e^{-2}$$

$$\boxed{= e^{-6}\frac{4^4}{4!} \approx 0.02644}$$

② Vegyük észre, hogy $g(z) = \frac{1}{2-z} \cdot \frac{1}{2-z} \cdot \frac{1}{2-z} \cdot e^{3(z-1)} =$

$$= g_A(z) \cdot g_B(z) \cdot g_C(z) \cdot g_D(z)$$

vagyis $X = A+B+C+D$, ahol A, B, C, D függetlenek,

A, B és C generátorfv-e $g_A(z) = \frac{1}{2-z}$, vagyis $A, B, C \sim$ $\sim Pessbeam\left(\frac{1}{2}\right)$

D generátorfv-e $g_D(z) = e^{3(z-1)}$, vagyis $D \sim Poi(3)$

$g_A'(z) = \frac{1}{(2-z)^2} \Rightarrow g_A'(1) = 1 = EA$ $\Rightarrow E(A^2) = 2+1 = 3$

$g_A''(z) = \frac{2}{(2-z)^3} \Rightarrow g_A''(1) = 2 = E(A^2 - A)$ ~~Var A = 3-1=2~~ $Var A = E(A^2) - (EA)^2 = 3-1 = 2$

$$\boxed{EA = 1, \quad Var A = 2}$$

$g_D'(z) = 3e^{3(z-1)} \Rightarrow g_D'(1) = 3 = ED$ $\Rightarrow E(D^2) = 9+3 = 12$

$g_D''(z) = 9e^{3(z-1)} \Rightarrow g_D''(1) = 9 = E(D^2 - D)$ $Var D = E(D^2) - (ED)^2 = 12 - 9 = 3$

$$\boxed{ED = 3, \; Var D = 3}$$

$$\Rightarrow \boxed{EX = EA + EB + EC + ED = 1+1+1+3 = 6}$$

$$Var X = Var A + Var B + Var C + Var D = 2+2+2+3 = 9$$

$$\boxed{DX = \sqrt{Var X} = 3}$$

Persze ugyanez kijön a $g(z)$ ész nélküli deriválásával is.

③ Legyen Z_n a hibák száma az n-edik fordítási kísérlet során, $n=0,1,2,\dots$ és a „legelső" kísérlet az $n=0$.
Ekkor $Z_0=1$ és Z_n Galton-Watson elágazó folyamat, melynek 1-lépéses utódszám-eloszlása

k	0	2	egyébként
$p_k=\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(k \text{ utód})$	$\frac{4}{10}$	$\frac{6}{10}$	0

Ennek várható értéke $m=EX=\frac{4}{10}\cdot 0+\frac{6}{10}\cdot 2=1.2$

generátorfüggvénye $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k=\frac{4}{10}\cdot z^0+\frac{6}{10}\cdot z^2=\frac{4+6z^2}{10}$

a.) $\mathbb{P}(Z_4=0)=?$ Ehhez legyen $r_n=\mathbb{P}(Z_n=0)$. Erről tudjuk, hogy $r_0=0$

$$r_1=g(r_0)=\frac{4+6\cdot 0^2}{10}=\frac{4}{10}$$

$$r_2=g(r_1)=\frac{4+6\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^2}{10}=0.496$$

$$r_3=g(r_2)=\frac{4+6\cdot(0.496)^2}{10}=0.5476096$$

$$\boxed{r_4=g(r_3)=\frac{4+6r_3^2}{10}=0.579925764}$$

b.) $\boxed{\mathbb{E}Z_4=m^4=(1.2)^4=2.0736}$

c.) $\mathbb{P}(\text{kihalás})=?$ Mivel $m>1$, a folyamat <u>szuperkritikus</u>, $r_\infty=\mathbb{P}(\text{kihalás})<1$ és számolni kell: megoldjuk a $z=g(z)$ egyenletet.

$$z=\frac{4+6z^2}{10} \Rightarrow z=1 \text{ vagy } z=\frac{2}{3}.\ r_\infty \text{ az egyetlen } [0,1)\text{-beli gyök} \Rightarrow \boxed{r_\infty=\frac{2}{3}}$$

$0=6z^2-10z+4$

$0=3z^2-5z+2=(z-1)(3z-2)$ $\boxed{\mathbb{P}(\text{előbb-utóbb lefordítja})=\frac{2}{3}}$