Sztochasztika 2 félvizsga megoldások

Felsőbb matematika informatikusoknak – Sztochasztika

2015. június 9. 8:00. Munkaidő: 70 perc.

1. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók sorozata. Legyen $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, és legyen Ψ_n az $\frac{S_n}{n}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Mennyi $t \in \mathbb{R}$-re a $\lim_{n\to\infty} \Psi_n(t)$ határérték?

   Megoldás:
   Az X_i-k közös várható értéke $M = \mathbb{E}X_i = 0$, így a nagy számok gyenge törvénye értelmében $\frac{S_n}{n} \Rightarrow M = 0$. A folytonossági tétel pedig azt állítja, hogy emiatt Ψ_n pontonként tart az $M \equiv 0$ val.változó karakterisztikus függvényéhez, vagyis $\Psi_M(t) = \mathbb{E}e^{itM} = e^{it0} = 1$-hez. Vagyis minden $t \in \mathbb{R}$-re

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n(t) = 1.$$

2. Egy forgalmas helyen lévő készpénzautomatát egy nap alatt (feltöltéstől feltöltésig) 500 ember használ. A legkisebb felvehető összeg ezer Ft, a legnagyobb százezer Ft. A bank tapasztalata szerint az emberek átlagosan 20-ezer Ft-ot vesznek fel. Az egyes emberek által felvett összegek függetlenek egymástól. Mennyi pénzzel kell az automatát feltölteni, ha 99%-ig biztosak akarunk lenni benne, hogy nem fogy ki a következő feltöltésig?

   Megoldás:
   Legyen $n = 500$, és számoljunk minden pénzösszeget „ezerFt”-ban, hogy ne kelljen olyan nagy számokat írni. Az egy nap alatt felvett összeg

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

   ahol X_i az i-edik ember által felvett összeg. S_n várható értéke a szöveg szerint $\mathbb{E}S_n = n \cdot 20 = 10000$.

   A Hoeffding-egyenlőtlenség szerint minden pozitív t-re

$$\mathbb{P}(S_n > \mathbb{E}S_n + t) \le \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right),$$

   ahol a_i és b_i az X_i alsó illetve felső korlátja: esetünkben minden $a_i = 1$ és $b_i = 100$, így a tört nevezője

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 = 500 \cdot (100 - 1)^2 = 4900500.$$

   Legyen tehát a betöltött pénz $K = \mathbb{E}S_n + t$, ahol

$$\exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right) = 0.01 \quad \text{(és nem pedig 0.99)},$$

   vagyis

$$-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} = \ln(0.01) = -2\ln 10,$$

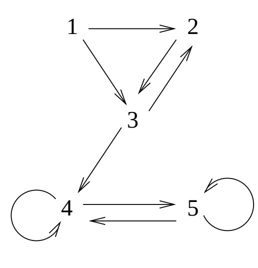
   amiből

$$t = \sqrt{(\ln 10) \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} = \sqrt{\ln 10 \cdot 4900500} \approx 3359.$$

   Tehát $K \approx 10000 + 3359 = 13359$ eFt-tal kell az automatát feltölteni.

3. Az ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

   - zárt-e vagy nyílt,
   - lényeges-e vagy lényegtelen,
   - visszatérő-e vagy átmeneti,
   - mennyi a periódusa.



Megoldás:

osztály	zártság	lényegesség	visszatérés	periódus
$\{1\}$	nyílt	lényegtelen	átmeneti	∞, vagy nincs
$\{2;3\}$	nyílt	lényegtelen	átmeneti	2
$\{4;5\}$	zárt	lényeges	visszatérő	1, aperiodikus

Édemes megjegyezzni, hogy az $\{1\}$ egy tisztességes egyelemű osztály: önmagával definíció szerint minden állapot kommunkiál, még akkor is, ha pozitív lépésszámban nem lehet oda önmagából (sem) visszajutni. Másképp mondva: az $i \leftrightsquigarrow j$ reláció („i kommunikál j-vel") egy rendes ekvivalencia, és a belőle adódó osztályozásnak az állapottér minden elemét le kell fedni. Az más kérdés, hogy az $\{1\}$ osztály periódusa problémás: az üreshalmaz legnagyobb közös osztója, ami ízlés szerint lehet ∞, vagy nem definiált.

4. Egy kisbolt parkolójában 3 autónak van hely. A parkolóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek az autós vevők, átlagosan 5 percenként. Ha a parkoló tele van, akkor továbbmennek, ha pedig van hely, akkor leparkolnak és bemennek a boltba, ahol exponenciális eloszlású véletlen időt töltenek el, 5 perc várható értékkel, egymástól függetlenül. Vásárlás után azonnal autóba ülnek és elhajtanak. Kezdetben a parkoló üres. Jelölje X_t ($t \geq 0$) a parkolóban lévő autók számát t perc elteltével.

   (a) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov lánccal. Adjuk meg az állapotteret és az infinitezimális generátort. (Vigyázat: érdemes észnél lenni. Két bent lévő vevő *egyike* könnyebben elmegy, mint egy vevő önmaga.)

   (b) Számoljuk ki X_t stacionárius eloszlását.

   (c) Hosszú idő elteltével közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a parkolót üresen találjuk?

   (d) Hosszú idő átlagában hány autó áll a parkolóban?

   (e) A potenciális autós vevők hány %-át veszíti el a bolt amiatt, hogy kicsi a parkolója?

Megoldás:
X_t véges állapotterű születési-halálozási folyamat. Az időt percben mérjük, így a felfelé ugrás rátája (autó jön) mindig $\frac{1}{5}$, hacsak nem tele van a parkoló, a lefele ugrás rátája (autó megy) pedig az i állapotból $i \cdot \frac{1}{5}$, $i = 0, 1, 2, 3$.

(a) Az állapottér $S = \{0; 1; 2; 3\}$, a generátor

$$G = \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & -2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 2/5 & -3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 3/5 & -3/5 \end{pmatrix}.$$

(b) A születési-halálozási folyamat stacionárius eloszlása a szomszédos állapotoknak olyan relatív súlyt ad, ami reciproka az egymásba való átugrások rátái arányának. Vagyis $\pi_0 : \pi_1 = 1 : 1$, $\pi_1 : \pi_2 = 2 : 1$, $\pi_2 : \pi_3 = 3 : 1$,. Összesítve $\pi_0 : \pi_1 : \pi_2 : \pi_3 = 6 : 6 : 3 : 1$. Az aránysort lenormálva

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{6}{16} & \frac{6}{16} & \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

Persze ugyanez jön ki, ha megoldjuk az $G^T \pi^T = 0$ egyenletrendszert (**a transzponálás nagyon fontos**), vagyis azt, hogy (az átláthatóság kedvéért 5-tel végigszorozva)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right).$$

(c) Hosszú idő elteltével a kiindulási állapottól függetlenül a stacionárius eloszlással közelítünk: $\mathbb{P}(X_t = 0 \,|\, X_0 = 0) \approx \pi_0 = \frac{6}{16} = 37.5\%$.

(d) Az ergodtétel értelmében az időátlag a stacionárius eloszlás szerinti várható érték, vagyis

$$\sum_{i\in S} i\cdot\pi_i = 0\cdot\frac{6}{16}+1\cdot\frac{6}{16}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{1}{16}=\frac{15}{16}\approx 0.94.$$

(Ha valaki mindenáron az állapottéren értelmezett valós értékű függvényre akarja az ergodtételt alkalmazni, tekintse az $f: S\to\mathbb{R}$, $f(i)=i$ függvényt.)

(e) A parkoló az idő $\pi_3=\frac{1}{16}$-ában van tele, tehát az autósoknak pontosan azt az $\frac{1}{16}$-át azaz 6.25%-át veszítjük el, aki ezalatt jön. Másképpen számolva: percenként átlagosan $\frac{1}{5}$ autós jön arra, de a Markov lánc felfelé ugrásainak száma (vagyis a ténylegesen leparkoló autók száma) időátlagban csak $\pi_0A_{01}+\pi_1A_{12}+\pi_2A_{23}=(\pi_0+\pi_1+\pi_2)\cdot\frac{1}{5}=\frac{15}{16}\cdot\frac{1}{5}$, vagyis az arra járó autók $\frac{1}{16}$-oda nem parkol le.