Villanykari MSc Mat „Sztochasztika 2" vizsga 2013.01.08 Megy

① **1. megoldás:** $N :=$ az asztalon maradó kockák száma, $N \sim Bin(6, \frac{2}{3})$.

$X_1, \ldots, X_N :=$ az egyes kockákon dobott számok $X_i \sim Uni(\{1, \ldots, 6\})$

Így $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$ véletlen tagszámú összeg. Generátorfüggvények:

$$g_N(z) = (q + pz)^n \quad \text{, ahol } p = \frac{2}{3},\; q = \frac{1}{3},\; n = 6$$

$$g_{X_i}(z) = \frac{z + z^2 + \ldots + z^6}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{g_X(z) = g_N(g_{X_i}(z)) = \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,\frac{z + z^2 + \ldots + z^6}{6}\right]^6}$$

Várható értékek: $EN = n \cdot p = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$, $EX_i = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{EX = EN \cdot EX_i = 4 \cdot \frac{7}{2} = 14}$$

2. megoldás: $Y_i := \begin{cases} \text{az } i\text{-edik kockán dobott szám, ha a kocka az asztalon maradt} \\ 0 \text{, ha leesett} \end{cases}$ $i = 1, \ldots 6$.

Így $X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_6$ és az Y_i-k függetlenek

$$\Rightarrow g_X(z) = (g_{Y_i}(z))^6 \text{ és } EX = 6 \cdot EY_i$$

Y_i eloszlása pedig

k	0	1	2	3	4	5	6
$P(Y_i = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$

$$\Rightarrow g_{Y_i}(z) = \frac{1}{3} + \frac{z + z^2 + \ldots + z^6}{9}, \quad \boxed{g_X(z) = \left[\frac{1}{3} + \frac{z + z^2 + \ldots + z^6}{9}\right]^6}$$

$$EY_i = \frac{1 + 2 + \ldots + 6}{9} = \frac{7}{3} \qquad \boxed{EX = 6 \cdot \frac{7}{3} = 14}$$

villanykari MSc Mat „Sztochasztika 2" vizsga 2013. 01.08 Megy

(2) Az átmenetmátrix

a.)

Az állapottér

$S = \{1, 2, 3, 4\}$

$$P = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1. & 2. & 3. & 4. \end{array} \\ \begin{array}{c} 1. \\ 2. \\ 3. \\ 4. \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

, vagyis a stac. eloszlás a $(P^T - \mathbb{1})\pi^T = 0$ egyenletrendszer megoldása

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/3 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Ezt megoldva és a $\sum_{i=1}^{4} \pi_i = 1$ feltétellel normálva az jön ki, hogy $\boxed{\pi = \left(\frac{2}{10}; \frac{3}{10}; \frac{3}{10}; \frac{2}{10}\right)}$

b.) $f(i) := \begin{cases} 1, \text{ ha } i = 2 \text{ vagy } 3 \\ 0, \text{ ha nem} \end{cases}$, vagyis $f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ennek időátlaga az ergodtétel szerint 1 valószínűséggel konvergál $\pi \cdot f = \underline{\underline{\frac{6}{10}}}$ -hez, mert a Markov lánc irreducibilis.

Villanykari MSc Mat „Sztochasztika 2" vizsga 2013. 01. 08 Megy

3 Az állapottér $S=\{0,1\}$, ahol $0:=$ „ki van égve"

$1:=$ „működik".

Az ugrási ráták $\lambda_{01}=12$ (ilyen rátával jön a gondnok)

$\lambda_{10}=1$ (ilyen rátával égnek ki az égők)

Így

a.) $G=\begin{pmatrix}-12 & 12\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

b.) $t=\frac{1}{365}$ rövid idő, így $P_{01}(t)\approx\left(\mathbb{1}+tG\right)_{01}=\underline{\underline{\frac{12}{365}}}\approx\underline{\underline{3.3\%}}$

c.) 20 év hosszú idő, így $\mathbb{P}(X(20)=1)\approx\pi_1$, ahol

π a stacionárius eloszlás, vagyis a $\pi G=0$ egyenletrendszer

normált megoldása: $G^T\pi^T=0$ $\left(\begin{array}{cc|c}-12 & 1 & 0\\ \cancel{12} & \cancel{-1} & \cancel{0}\end{array}\right)$ $\pi=\left(\frac{1}{13};\frac{12}{13}\right)$

$\Rightarrow\mathbb{P}(\text{20 év után pont működik})\approx\underline{\underline{\frac{12}{13}}}\approx 92.3\%$

d.) $\mathbb{P}(\text{januárban végig működik})=\mathbb{P}(\text{Jan. 1-jén működik})\cdot\mathbb{P}\left(\text{végig műk.}\,\middle|\,\text{1-jén műk.}\right)$

$$\approx\pi_1\cdot\mathbb{P}\Big(\underbrace{Exp(1)}_{\text{ilyen eloszlású az égő élettartama}}>\frac{1}{12}\Big)=\frac{12}{13}\cdot e^{-1\cdot\frac{1}{12}}\approx\underline{\underline{0.849}}$$

villanykari MSc Mat „Sztochasztika 2" vizsga 2013. 01. 08 Megy

(4) $m=1000$, $n=8$ jelöléssel a Likelyhood-függvény

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2}}$$, ennek logaritmusa

$$\ell(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} - \frac{(x_i-m)^2}{2\sigma^2} = \text{const} - n\ln\sigma - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2.$$

Ennek keressük a maximumhelyét, ami csak ott lehet, ahol a deriváltja nulla. (Ellenőrizhető, hogy $\sigma \searrow 0$-ban és $\sigma \nearrow \infty$-ben nincs maximumhely.)

Vagyis $$0 = \ell'(\sigma) = -\frac{n}{\sigma} + \frac{2}{2\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2$$, amiből

$$\boxed{\sigma_{ML} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}}$$. Esetünkben

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 = \frac{(-18)^2+22^2+9^2+(-2)^2+14^2+18^2+0^2+9^2}{8} = 186.75$$

$$\boxed{\sigma_{ML} = \sqrt{186.75} \approx 13.67}$$

(5) Egymintás, egyoldali t-próbát kellene végeznünk $\mu=1000$-rel, ahol a nullhipotézis $H0: m \geq \mu$. Mivel $\bar{x} = 1011 > \mu$, az adatok megerősítik a hipotézist, így további számolás nélkül elfogadjuk.

Ha ész nélkül számolnánk: $S_n^{*2} = 402.3\dot{3}$, $n=7$

$t = \frac{\bar{x}-\mu}{S_n^{*}}\sqrt{n} = 1.4509$, a küszöb $df=6$, $\varepsilon=0.10$-zel $t_\varepsilon = 1.440$, és akkor kellene $H0$-t elvetni, ha $-t > t_\varepsilon$ lenne.