Sztochasztika 2 vizsga Felsőbb matematika tárgy.

2013. január 15. 12:00. Munkaidő: 70 perc. Minden feladat 5 pontot ér.

1. Egy egyetemistának egy tantárgy teljesítéséhez egy feladatot kellene megoldania, ám ez csak $\frac{2}{10}$ valószínűséggel sikerül. $\frac{6}{10}$ valószínűséggel ugyanis az oktató nem lesz megelégedve, és egy másik feladatot is felad, $\frac{2}{10}$ valószínűséggel pedig annyira nem lesz megelégedve, hogy *két* új feladatot is ad. Az esetleges újabb feladatokat aztán ismét $\frac{2}{10}$ valószínűséggel tudja a hallgató jól megoldani, $\frac{6}{10}$ valószínűséggel kap helyettük egy újat, $\frac{2}{10}$ valószínűséggel pedig két újat – az előzményektől függetlenül.

   Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hallgató előbb-utóbb teljesíti a tárgyat?

2. Egy levelezőszerverre a levelek Poisson folyamat szerint érkeznek, percenként átlagosan 1. Adjunk nagy eltérés becslést annak a valószínűségére, hogy egy nap alatt legalább 1800 levél érkezik.

   Segítség: A μ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye $I_{Exp}(x) = \mu x - 1 - \ln(\mu x)$ (ha $x > 0$). A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye $I_{Poi}(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda$ (ha $x > 0$).

3. Egy közlekedési lámpának háromféle állapota lehet: 1:=piros, 2:=sárga, 3:=zöld. A lámpa elromlott, így lehetséges állapotai között véletlenszerűen ugrál: minden egész másodpercben vált. Piros és zöld után csak sárga következhet, sárgáról viszont $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ valószínűséggel vált pirosra vagy zöldre, az előzményektől függetlenül.

   a.) Modellezzük a lámpa állapotát Markov lánccal. Rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt és írjuk fel az átmenetmátrixot.

   b.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlását.

   c.) Amikor az időt mérni kezdjük, a lámpa éppen piros. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy 60 másodperc elteltével éppen sárga?

4. Egy közlekedési lámpának háromféle állapota lehet: 1:=piros, 2:=sárga, 3:=zöld. A lámpa elromlott, így lehetséges állapotai között véletlen időpontokban véletlenszerűen ugrál: ha az egyik irányból megy el egy autó, akkor a piros irányába vált (hacsak nem már piros), ha a másik irányból megy el egy autó, akkor a zöld irányába vált (hacsak nem már zöld). Az autók nem törődnek a lámpával, hanem minkét irányból (egy-egy független) Poisson folyamat szerint jönnek, mindkét irányból átlagosan kétmásodpercenként.

   a.) Modellezzük a lámpa állapotát folytonos idejű Markov lánccal. Rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt és írjuk fel az infinitezimális generátort. (Az időt mérjük másodpercben.)

   b.) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlását.

   c.) Amikor az időt mérni kezdjük, a lámpa éppen piros. Közelítőleg mennyi annak a valószínűsége, hogy 60 másodperc elteltével éppen sárga?

5. Pistike 1000-szer feldobott egy pénzérmét, és ebből 540-szer jött ki fej. Döntsünk 95%-os szinten arról a hipotézisről, hogy az érme szabályos – vagyis a fej valószínűsége $\frac{1}{2}$.