Felsőbb Matematika Informatikusoknak A,D és Villamosmérnököknek A,B
házi feladatok a „Sztochasztika 2” részhez
2012 ősz

Minden héten összesen egy pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2012.11.05.)

HF 1.1 Van két, ránézésre egyforma hatoldalú dobókockánk, melyek közül az egyik szabályos, azaz minden lapja $\frac{1}{6}$ valószínűséggel kerül felülre, a másik viszont cinkelt: a 6-osnak $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, a többi számnak $\frac{1}{10} - \frac{1}{10}$. Találomra kiválasztjuk az egyik dobókockát, majd dobunk vele kétszer. Mekkora valószínűséggel választottuk a cinkelt kockát, feltéve, hogy mindkét dobás 6-os lett?

2.HF: (Beadási határidő: 2012.11.09.)

HF 2.1 Egy nagyon nagy közösségben kezdetben egyetlen ember hordoz egy fertőző betegséget. Mielőtt meggyógyulna, továbbadja a betegséget X_1 másik embernek, ahol X_1 pesszimista geometriai eloszlású p paraméterrel. Miután meggyógyult, nem fertőz tovább. Minden további fertőzött ember a többiektől függetlenül és ugyanilyen eloszlással megfertőz újabb embereket, mielőtt meggyógyul. Modellezzük elágazó folyamattal a történteket, és ennek révén adjunk választ a következő kérdésekre $p = 0,4$ és $p = 0,6$ esetén is.

(a) Mennyi X_1 várható értéke?

(b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első emberen kívül senki más nem fertőz tovább (azaz a „második generáció” létszáma 0)?

(c) Jelölje X_3 a harmadik generáció létszámát. Határozzuk meg $\mathbf{E}X_3$ és $\mathbf{D}X_3$ értékét.

(d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy semelyik generáció sem hal ki? (Ez az esemény felel meg a járvány kialakulásának.)

(e) Jelölje N az összes megbetegedés számát. Határozzuk meg N várható értékét.

(f) Határozzuk meg N generátorfüggvényét. (Tipp: használjunk teljes várható érték tételt az első generáció létszáma szerint.)

3.HF: (Beadási határidő: 2012.11.16.)

HF 3.1 Két egymáshoz közeli szélfarmon 400 A típusú és 200 B típusú szélerőművet telepítettek. Az A típusú termelése 0,5 MW és 1,6 MW között ingadozik 1 MW átlagos termeléssel. A B típusú termelése 1,2 MW és 2,8 MW között van, átlagosan 2 MW.

(a) Számítsuk ki, hogy mekkora az a kapacitás, amit legalább $1-10^{-8}$ valószínűséggel nem lép túl a 600 erőmű össztermelése.

(b) Mekkora valószínűséggel lépi túl $C = 800$ MW-t az aktuális kapacitás?

(c) Tegyük fel, hogy a B típusúak mind be vannak kapcsolva. Ha $C = 800$ MW-ot nem szeretnénk túllépni legalább $1 - 10^{-8}$ valószínűséggel, akkor hány A típusú erőművet kapcsoljunk be?

(Megjegyzés: éljünk azzal a (távolról sem realisztikus) feltevéssel, hogy az egyes erőművek termelései függetlenek.)

4.HF: (Beadási határidő: 2012.11.26.)

HF 4.1 Egy ipari gép intenzív használatnak van kitéve, ezért minden nap végén megvizsgálják. A következő állapotok valamelyikébe sorolják:

0	új
1	működőképes, enyhén használt
2	működőképes, erősen használt
3	működésképtelen, cserélni kell (új gépre)

Az átmenetvalószínűségek mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Feltéve, hogy ma reggel a gép az 1-es állapotban volt, mekkora a valószínűsége, hogy holnap ÉS holnapután reggel is 1-es állapotban lesz?

(b) Határozzuk meg a stacionárius eloszlást.

(c) A működési költségek az egyes állapotokban rendre 0, 700, 2100 forint naponta; egy új gép ára 7000 forint. Határozzuk meg a teljes napi átlagos működési költséget hosszú távon. Átlagosan mennyi ebből az új gépek vásárlására költött összeg?

(d) Határozzuk meg, hány napig használnak átlagosan egy gépet, mielőtt cserélni kell.

5.HF: (Beadási határidő: 2012.12.07.)

HF 5.1 Egy posta ügyfélterében két kiszolgáló ablak működik. Az ügyféltérben az ablakoknál állókkal együtt legfeljebb 6 ügyfél tartózkodhat; az ilyenkor érkező további ügyfeleket a biztonsági őr kiszolgálás nélkül elküldi. Ha egy ablak felszabadul, a soron következő ügyfél azonnal beáll. Ha olyankor érkezik egy ügyfél, amikor mindkét ablak szabad, akkor találomra áll be valamelyikhez. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 5 perc, és az ügyfelek átlagosan 4 percenként érkeznek.

1. Modellezzük a rendszert Markov-lánccal. Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.
2. Határozzuk meg a stacionárius állapotot.
3. Az idő mekkora részében üres az ügyféltér?
4. Az idő mekkora részében tétlen az első ablaknál dolgozó kisasszony?
5. Az ügyfelek mekkora részét küldik el amiatt, hogy tele van az ügyféltér?