Villamos MSc „Sztochasztika 2" ZH megoldókulcs 2014.11.24 $\boxed{\text{B csepert}}$

Megy

(1) $g(z)=\dfrac{2}{4-2^z}$ Megj: $(2^x)'=2^x\cdot\ln 2$.

$$g'(z)=\frac{-2}{(4-2^z)^2}(-2^z\ln 2)=\frac{2\ln 2\cdot 2^z}{(4-2^z)^2}\Rightarrow g'(1)=\frac{2\ln 2\cdot 2}{(4-2)^2}=\ln 2$$

$$g''(z)=2\ln 2\,\frac{2^z\ln 2(4-2^z)^2+2^z\cdot 2(4-2^z)2^z\ln 2}{(4-2^z)^4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow g''(1)=2\ln 2\,\frac{\overbrace{2\ln 2(4-2)^2}^{8\ln 2}+\overbrace{2\cdot 2\cdot(4-2)2\cdot\ln 2}^{16\ln 2}}{\underbrace{(4-2)^4}_{16}}=3\ln^2 2$$

továbbá $g(0)=\dfrac{2}{4-2^0}=\dfrac{2}{4-1}=\dfrac{2}{3}$

$$g'(0)=\frac{2\ln 2\cdot 2^0}{(4-2^0)^2}=\frac{2\ln 2\cdot 1}{(4-1)^2}=\frac{2}{9}\ln 2.$$

Tehát

a.) $\mathbb{E}X=g'(1)=\ln 2\approx 0.693$

b.) $\mathrm{Var}\,X=g''(1)+g'(1)-g'^2(1)=3\ln^2 2+\ln 2-\ln^2 2=\ln 2+2\ln^2 2\approx 1.6541$

$DX=\sqrt{\mathrm{Var}\,X}=\sqrt{\ln 2+2\ln^2 2}\approx 1.2861$

c.) $\mathbb{P}(X=0)=g(0)=\frac{2}{3}\approx 0.6667$

$\mathbb{P}(X=1)=g'(0)=\frac{2}{9}\ln 2\approx 0.154$

(2) Nevezzük 0. generációnak az eredeti feladatot.

Nevezzük 1. generációnak az eredeti feladat esetleges kudarca miatt feladott további feladatokat (1-et vagy 2-t).

Nevezzük 2. generációnak az 1. generáció-beli feladatok esetleges kudarca miatt kiadott további feladatokat.

⋮ stb

Nevezzük $(n+1)$-edik generációnak az n. generációba tartozó feladatok esetleges kudarca miatt kiadott további feladatokat.

Jelöljük Z_n-nel az n. generáció elemszámát.

EZ FONTOS, ÉS ENÉLKÜL A MEGOLDÁS HÁTRALÉVŐ RÉSZE LEVEGŐBEN LÓG, ÉRTELMETLEN.

Nagy kár, hogy ezt kb senki nem írta le.

Z_n Galton-Watson elágazó folyamat, az 1-lépéses utódszám-eloszlás pedig

k	0	1	2
$\mathbb{P}(k \text{ utód})$	$\frac{2}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$

, amiből

$$m = \mathbb{E}(\text{utódok száma}) = \frac{2}{10}\cdot 0 + \frac{6}{10}\cdot 1 + \frac{2}{10}\cdot 2 = 1 \qquad \boxed{m=1}$$

A folyamat kritikus (és nem elfajult), ezért

a.) $\mathbb{P}(\text{hallgató átmegy a tárgyat}) = \mathbb{P}(\text{kihalás}) = \underline{\underline{1}}.$

b.) $\mathbb{E}(\text{feladott feladatok száma}) = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} Z_n\right) = \mathbb{E}N = \underline{\underline{\infty}}.$

③ <u>1. megoldás</u>: Legyen $n = 24 \cdot 60$ a percek száma,

X_i az i-edik percben érkező levelek száma,

$S_n := X_1 + \dots + X_n$ a napi össz-levélszám.

A kérdés: $\mathbb{P}(S_n > 1800) \lessapprox ?$

Ehhez: $X_i \sim Poi(1)$, nem korlátos, ezért a Hoeffding tétel nem használható.

Viszont az X_i-k függetlenek és azonos eloszlásúak, ezért a Cramér tétel alkalmazható. $m := \mathbb{E}X_i = 1$, és a kérdés

$$\mathbb{P}(S_n > 1800) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in \left(\frac{1800}{1440}; \infty\right)\right), \text{ ahol } a := \frac{1800}{1440} = 1.25 > m, \quad b := \infty$$

ezért a Cramér tétel szerint

$$\mathbb{P}(S_n > 1800) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a, b)\right) \lessapprox e^{-nI(a)}.$$

$$\text{Ebből } I(a) = I_{Poi(\lambda)}(x)\Big|_{\lambda=1,\, x=1.25} = 1.25 \ln\frac{1.25}{1} - 1.25 + 1 \approx 0.28929$$

$$\Rightarrow\ nI(a) = 1800 \ln(1.25) - 360 \approx 41.658$$

[VIGYÁZAT! Mivel $I(a)$-t meg fogjuk szorozni 1440-nel és így kerül a kitevőbe, nagyon vigyázni kell a kerekítéssel.]

Vagyis $\mathbb{P}(S_n > 1800) \lessapprox e^{-41.658} \approx \underline{\underline{8.1 \cdot 10^{-19}}}$

Megjegyzés: A Poisson eloszlás sajátosságai miatt <u>ugyanezt</u> kapjuk, ha $n = 24$, $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ ahol $Y_i \sim Poi(\lambda = 60)$ az i-edik órában érkező levelek száma és $\mathbb{P}(S_n > 1800) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (75; \infty)\right)$-t számoljuk,

vagy akár $n = 1$, $S_n = Z$ ahol $Z \sim Poi(\lambda = 1440)$ az egész nap érkező levelek száma, így $\mathbb{P}(S_n > 1800) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (1800; \infty)\right)$-t is számolhatnánk.

Villamos MSc „Sztochasztika 2" ZH megoldókulcs 2014.11.24 $\boxed{\text{B csoport}}$ Mogy

(3) 2. megoldás: Úgy is felfoghatjuk, hogy a levelek Poisson-folyamat szerint érkeznek – ez a feladat szövegének megfelel. Ekkor az egyes levelek érkezése között eltelt idők függetlenek és $Exp(\lambda)$ eloszlásúak, ahol $\lambda = 1$ a folyamat rátája (vagyis a percenként érkező levelek átlagos száma). Kivárunk 1800 levelet, és kérdeztük, hogy eltelt-e 1440 perc. Vagyis legyen

$n = 1800$, $Y_i :=$ amennyit az $(i-1)$-edik levél érkezése után még az i-edikre várni kell (percben).

$S_n := Y_1 + \ldots + Y_n$, és a kérdés $\mathbb{P}(S_n < 1440) \lessapprox ?$

Ehhez $Y_i \sim Exp(1)$ és függetlenek $\Rightarrow$ Cramér tétel használható.

[A Hoeffding-egyenlőtlenség nem jó, mert Y_i nem korlátos.]

$m := \mathbb{E}Y_i = \frac{1}{\lambda} = 1$. A kérdés

$$\mathbb{P}(S_n < 1440) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} < \frac{1440}{1800}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [0; 0.8)\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a, b)\right)$$

ahol $b = 0.8 < m$, így a Cramér tétel szerint

$$\mathbb{P}(S_n < 1440) \lessapprox e^{-n I(b)}, \text{ ahol } I(b) = I_{Exp(\mu)}(x)\Big|_{\mu=1,\, x=0.8} = 1\cdot 0.8 - 1 - \ln(1\cdot 0.8),$$

vagyis $I(b) = -\ln(0.8) - 0.2 \approx 0.0231436$

$\Rightarrow n I(b) = -1800 \ln(0.8) - 360 \approx 41.658$

$\Rightarrow \mathbb{P}(S_n < 1440) \lessapprox e^{-41.658} \approx \underline{\underline{8.1 \cdot 10^{-19}}}$

[Megj: $n I(b) = -1800 \ln(0.8) - 360 = +1800 \ln(1.25) - 360$, mert $\frac{1}{0.8} = 1.25$. Hasonlítsd össze az 1. megoldással!]