(1) Legyen $n=1000$ és $X_k = \begin{cases} 1, & \text{ha a } k\text{-adik dobás fej} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$

$S_n := X_1 + \dots + X_n$, és Pistike egy $\mathbb{P}(S_n \geq k)$ típusú valószínűséget akar becsülni.

A Berry-Esseen tétel szerint a CHT becslés hibájára

$$\text{hiba} \leq \frac{C\delta}{\sqrt{n}\,\sigma^3}, \text{ ahol } C = 0.48, \quad \sigma = DX_k$$

és $\delta = \mathbb{E}\left(|X_k - EX_k|^3\right)$.

Mivel $X_k \sim B(p = \frac{4}{10})$, $\sigma = \sqrt{p(1-p)} \approx 0.49$, $EX = 0.4$

és $\delta = \frac{6}{10}\left|0 - \frac{4}{10}\right|^3 + \frac{4}{10}\left|1 - \frac{4}{10}\right|^3 = \frac{6 \cdot 4 \cdot (6^2 + 4^2)}{10000} = \cancel{0.1248}\ 0.1248$

így $\frac{C\delta}{\sqrt{n}\,\sigma^3} \approx \frac{0.48 \cdot \cancel{0.1248}\ 0.1248}{\sqrt{1000} \cdot 0.49^3} \approx 0.016 = 1.6\,\%$.

Ennél pontosabbat Pistike nem tud állítani, így Móricka bízhat(na) a szerencséjében.

Sztochasztika 2 vizsga Felsőbb matematika tárgy.

2014.01.07-i vizsga 2. feladat megoldása

1. a,b megoldás: A kérdés átfogalmazható a következőképpen: Ha Móricka 5000-szer dob a kockával, mennyi a valószínűsége, hogy legablább 1000 dobása lesz 6-os?

Ezért legyen $n = 5000$ és $k = 1, 2, \ldots, n$-re legyen $X_k = 1$ ha a k-adik dobás 6-os, és legyen $X_k = 0$ ha nem.Így az X_k-k függetlenek és $p = \frac{1}{6}$ paraméterű Bernoulli eloszlásúak. $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ a dobott 6-osok száma, a kérdés pedig $\mathbb{P}(S_n \geq 1000)$.

a.) A legkönnyebb megoldást a Hoeffding egyenlőtlenség adja. $\mathbb{E}S_n = np = \frac{5000}{6}$, így legyen $t = 1000 - S_n = \frac{1000}{6}$, $a_k = 0$ és $b_k = 1$ minden $k = 1, 2, \ldots, n$-re. A Hoeffding egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}(S_n \geq \mathbb{E}S_n + t) \leq \exp\left\{ -\frac{2t^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k)^2} \right\} = \exp\left\{ -\frac{2 \cdot \left(\frac{1000}{6}\right)^2}{5000} \right\} \approx e^{-11.1} \approx 0.000015.$$

b.) Pontosabb becslést kaphatunk a Cramer tétel segítségével. Ez is könnyű – ha a segítség alapján tudjuk a rátafüggvényt. Legyen $m = \mathbb{E}X_k = p = \frac{1}{6}$, így a kérdés $\mathbb{P}(S_n \geq 1000) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \geq \frac{1}{5}) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in [a, b))$, ahol $a = \frac{1}{5}$ és $b = \infty$. Mivel $m < a$, a Cramer tétel azt állítja, hogy

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in [a, b)\right) \lessapprox e^{-n \cdot I(a)} = e^{-5000 \cdot I(\frac{1}{5})} \approx e^{-19} \approx 0.0000000054.$$

(a Bernoulli eloszlás rátafüggvényét számoltuk ki a segítség alapján $p = \frac{1}{6}$, $x = \frac{1}{5}$-ben.)

2. megoldás: A kérdést közvetlenül is nézhetjük: legyen $n = 1000$ és jelentse $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ azt, hogy mennyit kell várnia a 6os első, második, …, 1000-edik előfordulására (mindig az előző előfordulástól számítva). Így az Y_k-k függetlenek és (optimista) geometriai eloszlásúak $p = \frac{1}{6}$ parameterrel, $S_n := Y_1 + \cdots + Y_n$ pedig az 1000 darab 6-oshoz szükséges dobások teljes száma. A kérdés most $\mathbb{P}(S_n \leq 5000)$.

Vegyük észre, hogy az Y_k-k *nem korlátosak*, így a Hoeffding egyenlőtlenség nem alkalmazható. A Cramer tétel viszont most is működik. Alkalmazásához átírjuk a kérdést $\mathbb{P}(S_n \leq 5000) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \leq 5) = \mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \in (a, b])$ alakba, ahol $a = -\infty$ és $b = 5$ Legyen $m = \mathbb{E}Y_k = \frac{1}{p} = 6$. Mivel $b < m$, a Cramer tétel azt állítja, hogy

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a, b]\right) \lessapprox e^{-n \cdot I(b)} = e^{-1000 \cdot I(5)} \approx e^{-19} \approx 0.0000000054.$$

(a geometriai eloszlás rátafüggvényét számoltuk ki a segítség alapján $p = \frac{1}{6}$, $x = 5$-ben.)

Megjegyzés: A kérdéses valószínűségnek a centrális határeloszlás tétellel történő becslésére tett minden kísérlet hibás. a CHT nem *nagy eltérés tétel, és egyáltalán nem alkalmas az átlag ilyen szélsőséges értékei ilyen kicsi valószínűségeinek becslésére.*

Villamos MSc Sztoch2 1. vizsga 2014.01.07 megoldókulcs 3/4 Mogy

3 a.) $S=\{0,1,2,3,4,5\}$ az állapottér. Az időt mérjük órákban. Ugrások csak szomszédos állapotok között történnek. Felfelé mindig 2 rátával, mert ez a feladatok érkezési rátája. Lefelé $\lambda_{10}=1$, mert 1 gép az 1 feladatot ilyen rátával oldja meg, de már $\lambda_{21}=2$, mert 2 dolgozó gép egyike akkora rátával végez, mint a külön-külön ráták összege. Hasonlóan $\lambda_{32}=\lambda_{43}=\lambda_{54}=3$, mert a 3, 4, 5 állapotokban mindig 3 gép dolgozik.

Így a generátor
$$G=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

b.) Megoldhatjuk a $G^T\pi^T=0$ egyenletrendszert, vagy észrevehetjük, hogy X_t véges állapotterű születési-halálozási folyamat, amiből $\frac{\pi_0}{\pi_1}=\frac{1}{2}$; $\frac{\pi_1}{\pi_2}=\frac{2}{2}$; $\frac{\pi_2}{\pi_3}=\frac{3}{2}$; $\frac{\pi_3}{\pi_4}=\frac{3}{2}$; $\frac{\pi_4}{\pi_5}=\frac{3}{2}$.

Mindkettőből az jön ki (a $\pi_0+\ldots+\pi_5=1$ normálást is beleértve), hogy $\pi=\left(\frac{27}{211}; \frac{54}{211}; \frac{54}{211}; \frac{36}{211}; \frac{24}{211}; \frac{16}{211}\right)$

c.) Ha a teljesítményt kW-ban mérjük, akkor az $f=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\\3\\3\end{pmatrix}$ költségfüggvénnyel kell nekünk $f(X_t)$ időátlaga.

③ c) folyt.

Mivel a Markov lánc folytonos idejű, véges állapotterű és irreducibilis, az ergod tétel szerint

$$f(X_t) \text{ időátlaga} \Rightarrow \pi f = \frac{17\cdot 0 + 54\cdot 1 + 54\cdot 2 + 36\cdot 3 + 24\cdot 3 + 16\cdot 3}{211}$$

$$= \frac{390}{211} \approx 1.85 \quad (kW)$$

④ A Likelihood-fv. $L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f_\lambda(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i e^{-\lambda x_i}$,

a log-likelihood-fv.

$$\ell(\lambda) = \ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left[2\ln\lambda + \ln x_i - \lambda x_i \right],$$ ennek

keressük a maximumhelyét:

$$0 := \ell'(\lambda) = \frac{2n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i,$$ amiből $\boxed{\lambda_{ML} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}}$

Esetünkben $n = 7$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 91.9$, így

$$\boxed{\lambda_{ML} = \frac{7}{91.9} \approx 0.1523}$$