

Sztochasztika 2 vizsga Felsőbb matematika tárgy.

2015. január 13. 13:00. Munkaidő: ≤ 60 perc.

1. (8 pont) Z_n legyen Galton-Watson elágazó folyamat, melyben $Z_0 = 1$. Adjuk meg a folyamat kihalásának valószínűségét, ha az egy lépéses utódszám-eloszlás

a.) (2 pont)
$$\mathbb{P}(k \text{ utód}) \begin{array}{c|c|c|c} k & 0 & 1 & 2 \\ \hline & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{array}$$

b.) (2 pont)
$$\mathbb{P}(k \text{ utód}) \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline & 7/10 & 1/10 & 0 & 1/10 & 0 & 1/10 \end{array}$$

c.) (2 pont) Poisson $\lambda = 1$ paraméterrel,

d.) (2 pont) olyan, hogy az utódszám azonosan 1.

2. (10 pont) A Bergengóc Labdarúgó Szövetség négy osztályban rendez évente focibajnokságot: legfelül van az „első-”, alatta a „másod-”, ..., legalul a „negyed-” osztály. Amelyik csapat egy bajnokságból „kiesik”, az a következő évben egy osztállyal „lejjebb” folytatja, vagyis az 1. osztályból a 2.-ba, a 2.-ból a 3.-ba, a 3.-ból a 4.-be lehet kiesni. Az negyedosztályból kiesni nem lehet. Hasonlóan, aki elég jól szerepel, az „feljuthat” a 4. osztályból a 3.-ba, a 3.-ból a 2.-ba, a 2.-ból az 1.-be. Az első osztályból feljebb jutni nem lehet.

A Faláb FC, ha éppen 1. osztályú, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel esik ki. A 2. osztályból viszont már csak $\frac{1}{5}$, a 3. osztályból pedig $\frac{1}{6}$ valószínűséggel esnek ki, az előzményektől függetlenül. Másfelől, a 4. osztályból $\frac{1}{3}$ valószínűséggel feljutnak, ám a 3. osztályból már csak $\frac{1}{5}$, a 2. osztályból pedig $\frac{1}{8}$ valószínűséggel jutnak fel, az előzményektől függetlenül. A maradék valószínűséggel nem esnek ki és nem is jutnak fel, hanem maradnak az eddigi osztályban.

Fennállásának nulladik évében a Faláb FC a 4. osztályban küzd. Jelöljük X_n -nel, hogy hanyadik osztályban játszanak az n -edik évben.

a.) (1 pont) Rajzoljuk fel az X_n Markov lánc gráf-reprezentációját.

b.) (2 pont) Írjuk fel a Markov lánc állapotterét és átmenetmátrixát.

c.) (3 pont) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.

d.) (2 pont) Megközelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy 30 év elteltével a csapat ismét a 4. osztályban játszik? Miért?

e.) (2 pont) A 4.-osztályú meccsekre egy év alatt 500 néző megy ki, a 3.-osztályúakra 1000, a 2.-osztályúakra 2000, az 1.-osztályúakra pedig 4000. Mennyi lesz a Faláb FC meccseinek átlagos éves nézőszáma hosszú távon? Miért?

3. (7 pont) Egy összesen 100 pontos vizsgadolgozat megírása során a Móricka által elért pontszám normális eloszlású valószínűségi változó. Ennek várható értéke ismeretlen, és azt mutatja, hogy Móricka az anyag hány %-át tudja, a szórása pedig 9. Az egyes dolgozatok során elért pontszámok függetlenek egymástól (Móricka nem fejlődik). Megírt három dolgozatot, és ezeken 37, 35 illetve 39 pontot ért el. Döntsünk 99%-os szinten arról a hipotézisről, hogy Móricka az anyagnak legalább a felét tudja.