

Sztochasztika 2 vizsga Felsőbb matematika tárgy.

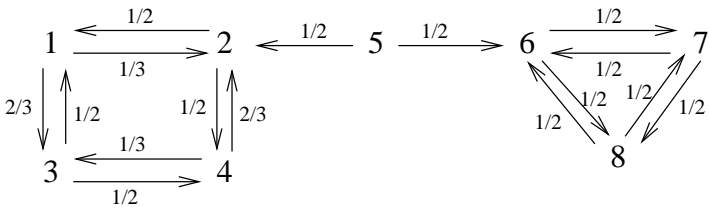
2015. január 20. 13:00. Munkaidő: ≤60 perc.

1. (7 pont) Egy koncessziós pályázat 10 fejezetből áll, a pályázók minden fejezetre legfeljebb 5 pontot kaphatnak. A bírálók a megítélt pontszámot fejezetenként kockadobással döntenek el, azonos esélyt adva a 0, 1, 2, 3, 4, 5 pontszámoknak. A felhívásra 10000 pályázat érkezik. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a pályázatok átlagos pontszáma eléri a 26-ot. (Vigyázat: hányszor is gurítják el a bírálók azt a dobókockát?)

(A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye)

$$I(x) = x \ln \left(\frac{x}{1-x} \frac{1-p}{p} \right) + \ln \left(\frac{1-x}{1-p} \right) \quad (\text{ha } 0 < x < 1.)$$

2. (8 pont) Legyen az X_n diszkrét idejű Markov lánc gráf-reprezentációja a következő:



Adjuk meg közelítőleg az alábbi valószínűségeket. A válaszokat indokoljuk.

- a.) (2 pont) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \mid X_0 = 6) \approx ?$
 b.) (2 pont) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \mid X_0 = 1) \approx ?$
 c.) (2 pont) $\mathbb{P}(X_{1000} = 2 \mid X_0 = 6) \approx ?$
 d.) (2 pont) $\mathbb{P}(X_{1000} = 7 \mid X_0 = 5) \approx ?$
3. (10 pont) Mérnök Mari újszülött gyermeke az édesanyja megfigyelése szerint háromféle állapotban lehet: 1 – „sír”; 2 – „alszik”; 3 – „eszik”. A gyermek időnként véletlenszerűen ugrik át egyik állapotból a másikba, az előzményektől (a jelenre, mint feltételre nézve feltételelesen) függetlenül, vagyis ő egy háromállapotú, folytonos idejű Markov lánc. Jelölje $X(t)$ a gyerek állapotát t időben. A beágyazott diszkrét idejű Markov-lánc Q átmenetvalószínűség mátrixa a következő:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$$

Az állapotsorrend 1,2,3 balról-jobbra és felülről-lefelé. Feltesszük, hogy az 1-es állapotban marad $Exp(8)$ ideig, a 2-es állapotban $Exp(1)$ ideig és a 3-asban $Exp(5)$ ideig. (Mari az időt órában méri.)

- a.) (3 pont) Írjuk fel a Markov lánc infinitezimális generátorát. Indokoljuk.
 b.) (3 pont) Keressük meg a Markov lánc stacionárius eloszlásait.
 c.) (2 pont) Az idő hány százalékában van az 1-es, 2-es, 3-as állapotokban? Miért?
 d.) (2 pont) Ha a gyerek az 1-es állapotban van, Marinak óránként 100 hajszála hullik ki. Hasonlóan a 2-es állapotban 5, a 3-as állapotban 20 hajszálat veszít óránként. Körülbelül hány hajszála hullik ki Mérnök Marinak, mire a gyermek eléri a négyhetes kort? Miért?