Sztochasztika félvizsga

Felsőbb matematika villamosmérnököknek A, B vizsgakurzus

2015. június 9. 8:00. Munkaidő: 70 perc. Minden feladat 10 pontot ér.

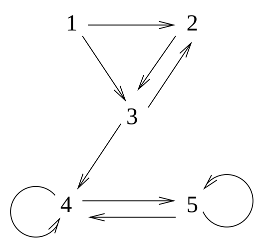
1. Legyen Z_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Galton-Watson elágazó folyamat, ahol $Z_0 = 1$ és az egylépéses utódszám-eloszlás

k	1	2	3	4
$\mathbb{P}(k \text{ utód})$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$

Mennyi a valószínűsége, hogy a folyamat előbb-utóbb kihal?

2. Egy forgalmas helyen lévő készpénzautomatát egy nap alatt (feltöltéstől feltöltésig) 500 ember használ. A legkisebb felvehető összeg ezer Ft, a legnagyobb százezer Ft. A bank tapasztalata szerint az emberek átlagosan 20-ezer Ft-ot vesznek fel. Az egyes emberek által felvett összegek függetlenek egymástól. Mennyi pénzzel kell az automatát feltölteni, ha 99%-ig biztosak akarunk lenni benne, hogy nem fogy ki a következő feltöltésig?

3. Az ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy
   - zárt-e vagy nyílt,
   - lényeges-e vagy lényegtelen,
   - visszatérő-e vagy átmeneti,
   - mennyi a periódusa.



4. Egy kisbolt parkolójában 3 autónak van hely. A parkolóhoz Poisson-folyamat szerint érkeznek az autós vevők, átlagosan 5 percenként. Ha a parkoló tele van, akkor továbbmennek, ha pedig van hely, akkor leparkolnak és bemennek a boltba, ahol exponenciális eloszlású véletlen időt töltenek el, 5 perc várható értékkel, egymástól függetlenül. Vásárlás után azonnal autóba ülnek és elhajtanak. Kezdetben a parkoló üres. Jelölje X_t $(t \geq 0)$ a parkolóban lévő autók számát t perc elteltével.
   (a) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov lánccal. Adjuk meg az állapotteret és az infinitezimális generátort. (Vigyázat: érdemes észnél lenni. Két bent lévő vevő *egyike* könnyebben elmegy, mint egy vevő önmaga.)
   (b) Számoljuk ki X_t stacionárius eloszlását.
   (c) Hosszú idő elteltével közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy a parkolót üresen találjuk?
   (d) Hosszú idő átlagában hány autó áll a parkolóban?
   (e) A potenciális autós vevők hány %-át veszíti el a bolt amiatt, hogy kicsi a parkolója?

5. Két nagy elektromos ellenállásról szeretnénk eldönteni, hogy melyik a nagyobb. Sajnos az ellenállást mérni csak hibával terhelten tudjuk: a műszerünk által mutatott érték egy valószínűségi változó, aminek a várható értéke a tényleges ellenállás, a szórása pedig $8M\Omega$. Ezért aztán mindkét ellenálláson több mérést is végeztünk, és a következő értékeket kaptuk ($M\Omega$-ban).

A ellenállás	758	772	745	765	764	747	764	751	765
B ellenállás	753	764	758	764	772	767			

Döntsünk 99%-os szinten arról a hipotézisről, hogy az A ellenállás legalább akkora, mint a B.

Segítség: Az A ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 759, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 87. A B ellenálláshoz tartozó adatsor átlaga 763, korrigált tapasztalati szórásnégyzete 44.8.