2. feladatsor

Generátorfüggvények

2010. november 3. és 8.

1. Legyen $X_1, X_2, \ldots$ független azonos, $\mathbb{N}$ értékű valószínűségi változók sorozata. Továbbá legyen N egy $\mathbb{N}$ értékű valószínűségi változó, amely független az X-ektől. Legyen $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Tudjuk, hogy $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}N \cdot \mathbf{E}X_1$. Mutassuk meg, hogy a szórásnégyzetre a következő egyenlőség áll fenn:
$$\mathbf{D^2}(Y) = \mathbf{D^2}(N)\mathbf{E}(X_1)^2 + \mathbf{E}(N)\mathbf{D^2}(X_1).$$

   Megoldás: Alkalmazzuk a teljes várható érték tételt $\mathbf{E}(Y)$ és $\mathbf{E}(Y^2)$ kiszámítására; álljon a teljes eseményrendszer a következő eseményekből: $\{N = 0\}, \{N = 1\}, \ldots, \{N = k\}, \ldots$.

2. Egy fizetős autópályán kapuknál kell befizetni az úthasználati díjat. Egy motornak 1, egy személy autónak 2, egy teherszállító autónak 5 pénzegységet kell fizetni. Tudjuk, hogy a járművek Poisson-folyamat szerint érkeznek $\lambda = 2$ jármű per perc rátával. Megfigyeltük, hogy egy jármű a fenti sorrendben 1/2, 1/3, és 1/6 valószínűséggel esik egy járműosztályba. Továbbá, az egymás utáni járművek típusa független.

   Határozzuk meg, hogy egy óra alatt átlagosan mennyi pénzegységet gyűjtenek a kapunál. Milyen folyamat szerint érkeznek a motorosok?

   Megoldás: Legyen a két óra alatt elhaladó járművek száma N, az i-edik jármű által fizetett díj pedig X_i. Ekkor $N \sim \mathrm{POI}(120)$. A teljes befolyt összeg Y. $\mathbf{E}Y = \mathbf{E}N \cdot \mathbf{E}X_1$-et használjuk; $\mathbf{E}(N) = 120$ és $\mathbf{E}X_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 5 = 2$, így $\mathbf{E}Y = 2$. A motorosok egy ritkított Poisson-folyamat szerint érkeznek, ez maga is egy Poisson-folyamat, a rátája $\frac{1}{2}\lambda = 1$ motoros/perc.

3. Egy bányász a bánya egy termében rekedt. A teremből öt ajtó nyílik: az első ajtó 2 órányi út végén a szabadba vezet. A második ajtó egy alagútba nyílik, mely 1 órányi séta után visszavezet ugyanebbe a terembe a harmadik ajtón keresztül. A negyedik ajtó szintén egy alagútba nyílik, mely 3 órányi séta után vezet vissza ugyanebbe a terembe az ötödik ajtón keresztül. A bányász találomra választ egy ajtót, majd minden alkalommal, amikor a terembe visszaér, elfelejti az addigi választásait, és az öt ajtó közül választ egyet egyenlő valószínűséggel, az előző választásoktól függetlenül.

   Határozzuk meg a szabadba érés idejének generátorfüggvényét. Határozzuk meg a szabadba érés idejének várható értékét.

   Megoldás: Legyen X a szabadba érés ideje órában, és $G(z) = \mathbf{E}(z^X)$ X generátorfüggvénye. $G(z)$-re teljes várható érték tételt alkalmazunk aszerint, hogy melyik ajtón megy be először a bányász.

$$G(z) = \mathbf{E}(z^X) = \mathbf{E}(z^X |\text{ 1. ajtó })\mathbf{P}(\text{ 1. ajtó }) + \tag{1}$$
$$\mathbf{E}(z^X |\text{ 2. vagy 3. ajtó })\mathbf{P}(\text{ 2. vagy 3. ajtó }) + \mathbf{E}(z^X |\text{ 4. vagy 5. ajtó })\mathbf{P}(\text{ 4. vagy 5. ajtó }). \tag{2}$$

Azt érdemes észrevenni, hogy
$$\mathbf{E}(z^X |\text{ 1. ajtó }) = z^2,$$

mert ilyenkor $X = 2$. Továbbá

$$\mathbf{E}(z^X \mid 2. \text{ vagy } 3. \text{ ajtó }) = \mathbf{E}(z^{X+1}) = zG(z),$$

mert ha a 2. vagy a 3. ajtóval kezdett, akkor amikor visszaért, elölről kezdi a próbálkozást, tehát a hátralévő idő eloszlása ugyanaz, mint X-é, de az összes időbe már beleszámít az az 1 óra is. Hasonlóan

$$\mathbf{E}(z^X \mid 4. \text{ vagy } 5. \text{ ajtó }) = \mathbf{E}(z^{X+3}) = z^3 G(z);$$

ezeket beírva a korábbi egyenletbe kapunk egy lineáris egyenletet $G(z)$-re:

$$G(z) = \frac{1}{5}z^2 + \frac{2}{5}zG(z) + \frac{2}{5}z^3 G(z),$$

melyet megoldva

$$G(z) = \frac{z^2}{5 - 2z - 2z^3}.$$

4. Van egy kék és egy piros dobókockánk, mindkettő szabályos. Dobunk először a piros kockával, majd annyiszor dobunk a kékkel, amennyi a piroson kijött. Jelölje Y a piroson kijött számot, X pedig a kéken kijött számok összegét.

   (a) Írjuk fel egy dobókocka generátorfüggvényét. Hogyan kapható meg ebből $\mathbf{E}Y$ értéke?

   (b) Írjuk fel X generátorfüggvényét és számítsuk ki ez alapján $\mathbf{E}X$-et és $\mathbf{D}X$-et.

   (c) Milyen előjelű $\text{cov}(X, Y)$?

5. Legyen X $\mathbb{N}$-értékű valváltozó. Jelöljük $G(z)$-vel a generátorfüggvényét. Írjuk fel $Y := X+1$ és $Z := 2X$ generátorfüggvényét G segítségével.

   Megoldás: $G_Y(z) = zG(z)$ és $G_Z(z) = G(z^2)$.

6. Legyenek $X_1, X_2, \dots, X_n$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük $F(x) = \mathbf{P}(X_i < x)$. Gondoljuk meg, hogy az $Y = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $H(x) = F^n(x)$.

   Megoldás:

   $$H(x) = \mathbf{P}(Y < x) = \mathbf{P}(X_1 < x, X_2 < x, \dots X_n < x) = \mathbf{P}(X_1 < x)\mathbf{P}(X_2 < x) \cdots \mathbf{P}(X_n < x)$$

   a függetlenség miatt, és

   $$\mathbf{P}(X_1 < x)\mathbf{P}(X_2 < x) \cdots \mathbf{P}(X_n < x) = [\mathbf{P}(X_1 < x)]^n = F^n(x).$$

7. Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük $F(x) = \mathbf{P}(X_i < x)$. Legyen ν ezektől független, pozitív egész értékű valószínűségi változó. Jelölje ν *generátorfüggvényét* $G(z)$. Mutassuk meg, hogy az $Y = \max\{X_1, X_2, \dots, X_\nu\}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $H(x) = G(F(x))$.

   Megoldás: Használjuk a teljes valószínűség tételt $H(x) = \mathbf{P}(Y < x)$ kiszámítására ν értéke szerint felbontva az eseményteret. $\mathbf{P}(Y < x | \nu = n)$ kiszámítására pedig alkalmazzuk az előző feladatot.

8. Egy vetélkedőn 3–5 fős csapatok vesznek részt. Egy csapat minden tagjának háromszor kell dobnia egy labdával, és a csapat eredménye ezen dobások közül a legnagyobb. A versenyen minden résztvevő egyformán jól dob, egy dobás nagyságának sűrűségfüggvénye (méterben):

   $$f(x) = \frac{50}{3x^2}, \quad 10 \le x \le 25$$

A versenyen ugyanannyi 3, 4 illetve 5 fős csapat van. Találomra kiválasztunk egy csapatot. Mi az eredményük eloszlásfüggvénye?

Megoldás: Az előző feladatot alkalmazzuk; legyen ν annak a száma, hogy a kiválasztott csapat hányat dob összesen. Ez 9, 12 vagy 15 lehet $\frac{1}{3}$—$\frac{1}{3}$ valószínűséggel. ν generátorfüggvénye $G(z) = \frac{1}{3}z^9 + \frac{1}{3}z^{12} + \frac{1}{3}z^{15}$, míg $F(x) = \int\limits_{10}^{x} f(y) \mathrm{d}\, y = \frac{50}{30} - \frac{50}{3x}$, $x \in [10, 25]$.

9. (a) Jelölje X egy szabályos kockával az első 6-osig szükséges dobások számát. Határozzuk meg X eloszlásának generátorfüggvényét az első dobás szerinti feltételes felbontásból adódó rekurzió segítségével.

   (b) Jelölje Y az ahhoz szükséges dobások számát, hogy két 6-os jöjjön egymás után. Mi lesz Y eloszlásának generátorfüggvénye? (Írjunk fel rekurziót az első 6-os utáni dobás értéke szerint feltételesen.)

Megoldás: $G(z) = \frac{1}{6}z + \frac{5}{6}zG(z)$, és $H(z) = G(z)\left[\frac{1}{6}z + \frac{5}{6}zH(z)\right]$. Az első egyenletben $\frac{1}{6}$ valószínűséggel egyből kijön a 6-os, egyébként pedig olyan, mintha elölről kezdenénk, a második egyenletben pedig először meg kell várni az első 6-ost, aztán vagy egyből kijön a második 6-os, vagy kezdhetjük elölről az egészet.

10. Tekintsünk egy diszkrét idejű prioritásos kiszolgáló rendszert (non-preemtive, FIFO) két osztállyal: 1. és 2. Az 1. osztálynak prioritása van a 2. osztállyal szemben. Minden csomagnak a kiszolgálása két időegységet igényel. Egy időegység alatt mindkét osztályba legfeljebb egy új csomag érkezhet: az 1. osztályba p valószínűséggel, a 2. osztályba r valószínűséggel érkezik csomag. Tegyük fel, hogy $0 < p, r < 1$.

    Határozzuk meg egy 2. osztálybeli csomag kiszolgálásához szükséges idő generátorfüggvényét, ha a csomag nem üres 2. osztályba érkezik.

<u>Centrális határeloszlás-tétel</u>

11. A Sóder kft. az építőiparban tevékenykedik. Minden hónap elején 70% eséllyel kapnak munkát. A munka mindig ugyanaz, minden esetben egy hónapig tart, és a bevétel egy ilyen munkából 1 millió forint. Egy tétlenül töltött hónap bevétele 0.

    (a) Mennyi 30 hónap alatt a bevételük várható értéke?

    (b) Becsüljük meg, mekkora annak az esélye, hogy 30 hónap alatt a bevételük kevesebb, mint 20 millió forint.

    (c) Becsüljük meg, mekkora annak az esélye, hogy 30 hónap alatt a bevételük kevesebb, mint 15 millió forint.

Megoldás:

(a) 30 hónap alatt a bevételük várható értéke 21 millió forint.

(b) Legyen S a bevételük 30 hónap alatt (millió forintban). $\mathbf{P}(S < 20)$-at szeretnénk megbecsülni úgy, hogy S-et normális eloszlással közelítjük. Vegyük észre, hogy S nem vehet fel 19 és 20 közötti értékeket, míg a közelítő normális eloszlás folytonos, így valamekkora valószínűséggel 19 és 20 közé esik. Legyen Z a közelítő normális eloszlás; paraméterei $m = 21$ és $\sigma = \sqrt{30} \cdot \sqrt{0,3 \cdot 0,7}$. $\mathbf{P}(S < 20)$-ra szeretnénk pontos becslést. Erre szóba jön az előbbiek miatt $\mathbf{P}(Z < 19)$ és $\mathbf{P}(Z < 20)$ is; melyiket használjuk? A legjobban akkor járunk, ha ilyenkor 19,5-et helyettesítünk be. Számszerűen:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(S < 20) &= 0,275 \\
\mathbf{P}(Z < 19) &= 0,212 \\
\mathbf{P}(Z < 20) &= 0,345 \\
\mathbf{P}(Z < 19,5) &= 0,269
\end{aligned}$$

12. Dömötör rulettezik a kaszinóban. Minden egyes körben 1000 forintot tesz „piros”-ra. 100 játék után 3000 forint a vesztesége. Érdemes-e csalásra gyanakodnia? (A rulettkorongon összesen 37 mező szerepel, melyek közül 1 zöld, 18 piros és 18 fekete. Szabályos játék esetén mindegyik egyforma eséllyel jön ki.)

    Megoldás: Dömötörnek nem érdemes gyanakodnia. Ha a tényleges vesztesége 100 játék után S, akkor $\mathbf{E}S \approx -2703$ és $\mathbf{D}S \approx 9996$, tehát jóval a szóráson belül van az eltérés a várható értéktől.

13. Az egy zsákban lévő cement súlyának várható értéke 50 kg, szórása 3 kg. Hány zsák cementet vásároljunk, hogy legalább 2 tonna cementünk legyen legalább 95% eséllyel? Ha ennél eggyel több zsákot vásárolunk, mekkora biztonsággal lesz legalább 2 tonna cementünk?