5. feladatsor

Folytonos idejű Markov-láncok, ML becslések

2011. november 30.

Folytonos idejű Markov-lánc

1. Adott egy öt állapotú ($\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$) Markov-lánc a következő átmenetvalószínűségi mátrixszal:

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(az állapot sorrend 0,1,2,3,4 felülről lefelé, illetve balról jobbra).

Definiáljuk a következő sztochasztikus folyamatot: két ugrás között az egyes állapotokban véletlen hosszú ideig tartózkodik, de ha ugrik, akkor az ugrás helyét a fent definiált Markov-lánc írja le. Pontosabban, ha a 0-ás, 1-es, 2-es, 3-as, vagy 4-es állapotokba ugrott, akkor a következő ugrásig eltelő idő eloszlása sorrendben $Exp(1), Exp(4), Exp(4), Exp(4), Exp(2)$. Feltesszük továbbá, hogy a tartózkodási idők függetlenek egymástól.

A most definiált sztochasztikus folyamat egy 4 helyet tartalmazó kiszolgáló sorhossz fejlődését írja le, amelyben a kiszolgálás csak véletlen időnként van, de akkor azonnal kiszolgálja az összes igényt.

(a) Írjuk fel a folytonos idejű Markov-lánc gráfreprezentációját. (Az irányított éleken az exponenciális órák paramétere van feltüntetve.)

(b) Határozzuk meg, hogy hosszú távon hány százalékban tartózkodik az egyes állapotokban.

(c) Az állapotokhoz egy költségrátafüggvény is adott: i állapotba lépésnek a költségrátája $i + 2$, $i = 0, 1, 2, \ldots, 4$. Mi a hosszú távú átlagos költsége a folyamatnak?

2. *On-Off rendszer.* Ha egy gép működőképes, akkor $Exp(\lambda)$ ideig még működik. Ha elromlik, akkor a megjavítása $Exp(\mu)$ ideig tart, eddig nem működőképes. Amint megjavították, rögtön működni kezd. Javítási és működési periódusok minden tekintetben függetlenek egymástól. Határozzuk meg, hogy az idő hány százalékában működőképes a gép.

3. Legyen X_t folytonos idejű Markov-lánc az $S = \{1, 2, 3, 4\}$ állapottéren, melynek generátora

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Írjuk fel az X_t Markov-lánc stacionárius eloszlását.

(b) Tegyük fel, hogy a Markov-lánc az 1 állapotból indul. Mennyi az első ugrásig eltelt idő várható értéke?

(c) Újból tegyük fel, hogy a Markov-lánc az 1 állapotból indul. Mennyi a 4 állapot első elérési idejének várható értéke?

A születési–halálozási folyamatok a folytonos idejű reguláris Markov-láncok egy alkalmazások szempontjából nagyon fontos osztálya. Ezekben a folyamatokban az állapottér $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Ha $i \neq 0$ egy állapot, akkor a folyamat, csak $(i + 1)$-be (születés) ugorhat λ_i rátával, vagy $(i - 1)$-be (halálozás) ugorhat μ_i rátával. A 0 állapotból csak az 1-be lehet ugrani λ_0 rátával. Egy állapotba való ugrás rátája λ azt jelenti, hogy az állapotban indított exponenciális óra $Exp(\lambda)$ eloszlású idő múlva cseng.

Egy születési–halálozási folyamatnak, ha létezik stacionárius eloszlása, $\underline{\pi}$, akkor

$$\pi_{i+1} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_i}{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{i+1}} \pi_0, \ i \geq 0. \qquad (1)$$

Pontosan akkor létezik stacionárius eloszlás, ha

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1 \dots \lambda_i}{\mu_1\mu_2 \dots \mu_{i+1}} < \infty, \qquad \text{ekkor} \qquad \pi_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda_0\lambda_1\dots\lambda_i}{\mu_1\mu_2\dots\mu_{i+1}}}.$$

Ha az állapottér véges, $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, B\}$, akkor mindig létezik stacionárius eloszlás és a (1) összefüggés érvényes marad az összes állapotra.

4. Számoljuk ki a stacionárius eloszlásokat a 4. feladatsor 7. feladatában.

5. Tekintsük az $M/M/2$ kiszolgálómodellt λ beérkezési intenzitással. A csomagok mérete egymástól független, exponenciális eloszlású μ paraméterrel. A $/2$ azt jelenti, hogy 2 szerver szolgálja ki a csomagokat. Egy szerver egyszerre csak egy csomagot szolgál ki.

   (a) A rendszer beindítása után sok idővel megvizsgáljuk, hogy hány csomag van a kiszolgálóban. Mi a valószínűsége, hogy ez a szám legfeljebb N, ahol N egy pozitív egész.

   (b) Az idő mekkora hányadában van N-nél több csomag a rendszerben?

   (c) Egy csomag tárolásának az ára egy időegységig \$1. Határozzuk meg, hogy a rendszer működésének mennyi a hosszú távú költsége, azaz egy időegységre eső költsége.

   (d) Legyen $\lambda = 1$ $\mu = 2$. Mekkora legyen a puffer mérete, ha azt szeretnénk, hogy az idő legfeljebb 10^{-8} részében legyen teli a puffer. Közelítsünk végtelen pufferes rendszerrel.

6. Tekintsünk egy születési–halálozási folyamatot, melynek születési rátái $\lambda_n = 1/(n+1)$, halálozási rátái pedig $\mu_n = 1$. Azonosítsuk a stacionárius eloszlást.

   Ez megegyezik egy olyan kiszolgálónak a modelljével, ahova a csomagok 1 rátával érkeznek, és 1 rátával szolgálódnak ki, de minden csomagnál sorsolunk, hogy beengedjük-e, vagy nem. Pontosabban, ha n csomag van a rendszerben, akkor $1/(n+1)$ valószínűséggel engedjük csak be. A csatolt születési halálozási folyamat pedig a várakozó csomagok számának időbeli fejlődése.

Maximum likelihood becslések

7. Egy $n = 10$ szervert tartalmazó kiszolgáló minden szerverre minden pillanatban $0 < p < 1$ valószínűséggel foglalt, a foglaltságok szerverenként függetlenek. Tehát a foglaltak száma $Binom(n, p)$ eloszlásúnak tekinthető. A p-t szeretnénk meghatározni, ehhez 10 mérést végeztünk: 2,3,2,5,4,6,3,1,0,1.

   A minta alapján határozzuk meg p legvalószínűbb értékét, azaz adjuk meg a p maximumlikelihood becslését általában $Binom(n, p)$ (fix n esetén), majd a konkrét példában.

8. Adjuk meg az (a) exponenciális, (b) Poisson, (c) geometriai eloszlásból vett minták maximum likelihood becslését.

9. Tegyük fel, hogy egy kérdőívvel a megkérdezettek jövedelmi viszonyait akarják felderíteni. A korábbi tapasztalatok szerint a magas jövedelműek 0,2 valószínűséggel alacsony jövedelműnek vallják magukat. Az alacsony jövedelműek csupán 0,1 valószínűséggel állítják, hogy ők a magas jövedelműek. Adjunk maximum likelihood becslést a tényleges θ arányra az alapján, hogy a beérkezett kérdőívek közül x szólt magas, $n - x$ pedig alacsony jövedelemről.

10. A családok jövedelmét egy olyan skálán mérjük, ahol $X = 1$ a létminimumnak felel meg. Feltételezzük, hogy a jövedelem eloszlása az $f(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}}$ $(x \geq 1)$ sűrűségfüggvénnyel adható meg. (Ez az úgynevezett Pareto-eloszlás). Adjunk maximum likelihood becslést a θ-ra, ha 10 véletlenszerűen választott család jövedelme alapján: 1,53, 2,76, 19,65, 4,16, 7,31, 1,21, 254,2, 5,45, 1,12, 1,63.

11. Egy alkatrészt élettartama exponenciális eloszlású θ/t várható értékkel ha t hőmérsékleten működtetjük. Tegyük fel, hogy az n megfigyelést a különböző $t_1, \dots, t_n$ hőmérsékleten végeztük és $x_1, \dots, x_n$ élettartamokat figyeltünk meg. Adjunk maximum likelihhod becslést θ-ra.

12. Egy város energiafogyasztása normális eloszlású ismeretlen μ várható értékkel és a korábbi tapasztalatok alapján ismert σ szórással. n napon keresztül végeztünk méréseket $x_1, \dots, x_n$ eredménnyel, majd az $(n+1)$-dik naptól m napon keresztül át csak a város egyik kerületéből érkeztek adatok, ahol a fogyasztás várható értéke az egész város fogyasztásának a fele: $y_1, \dots, y_m$ a kapott adatsor. Tételezzük fel, hogy a szórás itt is σ. Adjunk maximum likelihood becslést μ-re.

Házi feladat: 6., 7.