2. feladatsor

Teljes várható érték tétel, CHT

2011. november 2.

1. Péter, ha kockával páratlant dob 100 Ft-ot veszít, ha 6-ot dob 400 Ft-ot nyer, ha 2-öt, vagy 4-et dob, újból dob. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára hosszú távon? Mennyibe kerüljön a játék, hogy igazságos játék legyen?

2. Egy bányász a bánya egy termében rekedt. A teremből öt ajtó nyílik: az első ajtó 3 órányi út végén a szabadba vezet. A második ajtó egy alagútba nyílik, mely 5 órányi séta után visszavezet ugyanebbe a terembe a harmadik ajtón keresztül. A negyedik ajtó szintén egy alagútba nyílik, mely 7 órányi séta után vezet vissza ugyanebbe a terembe az ötödik ajtón keresztül. A bányász találomra választ egy ajtót, majd minden alkalommal, amikor a terembe visszaér, elfelejti az addigi választásait, és az öt ajtó közül választ egyet egyenlő valószínűséggel, az előző választásoktól függetlenül.

   Határozzuk meg a szabadba érés idejének szórásnégyzetét.

   Jelöljük N-nel a szabadba jutásig eltelő időt.

   (a) Határozzuk meg a szabadba érés idejének várható értékét.
   (b) Változik-e $\mathbf{E}N$, ha 3 órányi séta után nem ért el a szabadba, akkor visszafordul a bányász?
   (c) Határozzuk meg a szabadba érés idejének szórásnégyzetét az eredeti feladatban.
   (d) Határozzuk meg a z^N várható értékét, ahol $z \in [0,1]$ tetszőleges rögzített valós szám.

3. Van egy kék és egy piros dobókockánk, mindkettő szabályos. Dobunk először a piros kockával, majd annyiszor dobunk a kékkel, amennyi a piroson kijött. Jelölje Y a piroson kijött számot, X pedig a kéken kijött számok összegét.

   Határozzuk meg $\mathbf{E}X$ értékét.

4. Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, közös eloszlásfüggvényük $F(x) = \mathbf{P}(X_i < x)$. Gondoljuk meg, hogy az $Y = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $H(x) = F^n(x)$.

5. Számítógéppel generálunk 10 független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót. Határozzuk meg X_{10}^*=*a legnagyobb szám a 10 valváltozó közül* eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét.

   (a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a legnagyobb szám a $[0,9;1]$ intervallumba esik.
   (b) Határozzuk meg X_{10}^* várható értékét.

6. Egy vetélkedőn 3–5 fős csapatok vesznek részt. Egy csapat minden tagjának háromszor kell dobnia egy labdával, és a csapat eredménye ezen dobások közül a legnagyobb. A versenyen minden résztvevő egyformán jól dob, egy dobás nagyságának sűrűségfüggvénye (méterben):

   $$f(x) = \frac{50}{3x^2}, \quad 10 \le x \le 25$$

   A versenyen ugyanannyi 3, 4 illetve 5 fős csapat van. Találomra kiválasztunk egy csapatot. Mi az eredményük eloszlásfüggvénye?

7. (a) Jelölje X egy szabályos kockával az első 6-osig szükséges dobások számát. Határozzuk meg az z^X eloszlásának várható értékét az első dobás szerinti feltételes felbontásból adódó rekurzió segítségével.
   (b) Jelölje Y az ahhoz szükséges dobások számát, hogy két 6-os jöjjön egymás után. Mi lesz z^Y eloszlásának várható értéke? (Írjunk fel rekurziót az első 6-os utáni dobás értéke szerint feltételesen.)

8. Móricka frissen nyitott szoftver kereskedése nagyon jól megy. Egy rendelés kitöltésére fordított ideje 3 perc. Ezalatt j új vásárló áll be a várakozók közé p_j valószínűséggel, ahol $p_0 = 0,6$, $p_1 = 0,2$ és $p_2 = 0,2$. Tegyük fel, hogy a várakozó szoba kapacitása végtelen. Móricka csak akkor tud kávészünetet tartani, ha nincs várakozó igény.

   (a) Számítsuk ki, hogy egy vásárló kiszolgálása alatt várhatóan hány új vásárló érkezik?

(b) Számítsuk ki, hogy várhatóan mennyi ideig kell várakozni Mórickának ez első kávészünetig.

(c) Mi a válasz az első két kérdésre, ha $p_0 = 0,2$, $p_1 = 0,2$ és $p_2 = 0,6$? Működőképes-e Móricka kiszolgáló rendszere hosszútávon, ha ezek a valószínűségek?

(d) Mi a válasz az első két kérdésre, ha $(p_0, p_1, \dots)$ Poisson-eloszlású λ paraméterrel, ha $\lambda < 1$, $\lambda > 1$?

9. Tekintsük a következő két kiszolgáló rendszert:

   (a) $M/D/1$ sorbanállási rendszert: végtelen puffer, 1 szerver, FIFO ütemező, Poisson-folyamat szerint érkeznek az igények $\lambda = 0,9$ időegység intenzitással, minden igény kiszolgálása egy időegységig tart. Számítsuk ki, hogy átlagosan milyen hosszú egy foglaltsági periódus.

   Egy foglaltsági periódus akkor kezdődik, amikor egy igény érkezik az üres rendszerbe (nincs várakozó csomag, nincs csomag kiszolgálás alatt), és akkor ér véget, amikor ezután először lesz üres a rendszer.

   (Segítség: Határozzuk meg, hogy egy igény kiszolgálása alatt a beérkező új igények száma milyen eloszlású, majd alkalmazzuk a 8. feladat megoldási módszerét.)

   (b) $D/M/1$ sorbanállási rendszert: végtelen puffer, 1 szerver, FIFO ütemező, időegységenként pontosan egy igény érkezik, minden igény kiszolgálása exponenciális eloszlású ideig tart, amelynek a paramétere $1/2$. Határozzuk meg, hogy egy igény kiszolgálása alatt a beérkező új igények száma milyen eloszlású, majd számítsuk ki, hogy átlagosan *hány igény* szolgálódik ki egy foglaltsági periódus alatt.

10. $(Binom(2,p)/D/1)$ Tekintsük a következő kiszolgáló rendszert. Két puffer, mindegyik végtelen nagy, 1 szerver, FIFO ütemező nem szakít félbe csomag kiszolgálást (non-preemptive), minden igény kiszolgálása egy időegységig tart, egy igény kiszolgálása alatt minden pufferbe $0 < p < \frac{1}{2}$ valószínűséggel egy új csomag érkezik, $1 - p$ valószínűséggel nem érkezik csomag. A csomagérkezések egy adott időben pufferenként, és minden más időtől függetlenek.

    Mutassuk meg, hogy egy időegység alatt beérkező új csomagok száma $Binom(2,p)$ eloszlású.

    Számítsuk ki, hogy átlagosan milyen hosszú egy foglaltsági periódus.

    (Segítség: Alkalmazzuk a 8. feladat megoldási módszerét.)

    Ebben az esetben egy foglaltsági periódus akkor kezdődik, amikor egy igény érkezik a rendszerbe úgy hogy mindkét puffer üres, és nincs csomag kiszolgálás alatt, és akkor ér véget, amikor ezután először lesz üres a rendszer.

<u>Centrális határeloszlás-tétel</u>

11. A Sóder kft. az építőiparban tevékenykedik. Minden hónap elején 70% eséllyel kapnak munkát. A munka mindig ugyanaz, minden esetben egy hónapig tart, és a bevétel egy ilyen munkából 1 millió forint. Egy tétlenül töltött hónap bevétele 0.

    (a) Mennyi 30 hónap alatt a bevételük várható értéke?

    (b) Becsüljük meg, mekkora annak az esélye, hogy 30 hónap alatt a bevételük kevesebb, mint 20 millió forint.

    (c) Becsüljük meg, mekkora annak az esélye, hogy 30 hónap alatt a bevételük kevesebb, mint 15 millió forint.

    (d) Minimum hány hónapig kell dolgozniuk, hogy 21 millió forint legyen a bevételük legalább 95% eséllyel?

12. Dömötör rulettezik a kaszinóban. Minden egyes körben 1000 forintot tesz „piros”-ra. 100 játék után 3000 forint a vesztesége. Érdemes-e csalásra gyanakodnia? (A rulettkorongon összesen 37 mező szerepel, melyek közül 1 zöld, 18 piros és 18 fekete. Szabályos játék esetén mindegyik egyforma eséllyel jön ki.)

13. Az egy zsákban lévő cement súlyának várható értéke 50 kg, szórása 3 kg. Hány zsák cementet vásároljunk, hogy legalább 2 tonna cementünk legyen legalább 95% eséllyel? Ha ennél eggyel több zsákot vásárolunk, mekkora biztonsággal lesz legalább 2 tonna cementünk?

Házi feladat: 10. és 13.