Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika
házi feladatok, 2015 ősz

Minden héten összesen 2 pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2015.09.28.)

HF 1.1 Egy lépcsőházban lévő (egyetlen) villanykörte folyamatosan ég. Élettartama véletlen, exponenciális eloszlású 1000 óra várható értékkel. Ha a körte kiég, a gondnok azonnal kicseréli egy ugyanolyanra.

a.) Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy holnap 08:00 és 08:10 között kiég (legalább) egy körte?

b.) Mennyi a valószínűsége, hogy jövő héten pontosan 2 körte ég ki?

c.) Mennyi a valószínűsége, hogy 2016 februárban pontosan 2 körte ég ki, és mindkettő a hónap első hetében?

HF 1.2 Eldobunk egy szabályos dobókockát. Ezután feldobunk annyi szabályos érmét, amennyit a kockával dobtunk. Legyen X az érmékkel dobott fejek száma. Mennyi X várható értéke? *(Tipp: használjuk a teljes várható érték tételt!)*

2.HF: (Beadási határidő: 2015.10.12.)

HF 2.1 Egy számítógépes programban egy véletlen, rekurzív rutin fut: minden egyes részfolyamat egységnyi időt vesz igénybe, ám ezen felül minden részfolyamat véletlen számú, önmagával megegyező al-folyamatot indít. Az így indított al-folyamatok száma 0, 1, 2 vagy 3 lehet, rendre $p_0 = p$, $p_1 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{4}$ és $p_3 = \frac{1}{2} - p$ valószínűséggel, *az előzményektől függetlenül.*

Kezdetben egyetlen „gyökér” folyamat fut, ez alkotja egyedül a nulladik generációt. Az első generációt a „gyökér” által (közvetlenül) indított alfolyamatok alkotják, a második generációt az első generáció tagjai által indítottak, stb.

Jelölje Z_k a k-adik generáció tagjainak a számát ($k = 0, 1, 2, \dots$), N pedig a program futása során induló részfolyamatok teljes számát (vagyis $N = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k$, ami egyben a program teljes futási ideje is).

Válaszoljuk meg az alábbi kérdéseket

I. $p = \frac{1}{2}$ esetén,

II. $p = \frac{1}{4}$ esetén:

a.) Mi Z_2 generátorfüggvénye?

b.) Mennyi Z_{10} várható értéke?

c.) Mennyi a $\mathbb{P}(Z_3 = 0)$ valószínűség?

d.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a program előbb-utóbb lefut (vagyis hogy valamelyik generáció már üres)? *(Tipp: ha egy harmadfokú egyenlet egyik gyökét valahonnan ismerjük, akkor a többi is könnyű.)*

e.) Mennyi N várható értéke?

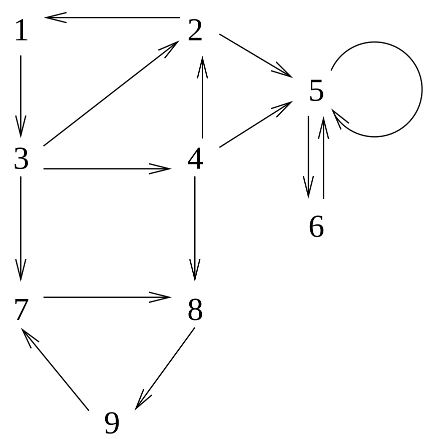
f.) Mi N generátorfüggvénye?

3.HF: (Beadási határidő: 2015.10.26.)

HF 3.1 Egy béka úgy ugrál a számegyenesen, hogy minden másodpercben $\frac{1}{3}$ valószínűséggel helyben ugrik, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel egyet ugrik előre, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel pedig kettőt, az előzményektől függetlenül. Kezdetben a 0-ban van. Móricka a centrális határeloszlás tétel segítségével szeretné megbecsülni annak valószínűségét, hogy a béka 1000 ugrással legalább 1300-ig eljut. Legfeljebb mennyi lesz Móricka becslésének hibája a Berry-Esseen tétel szerint? *(Megj.: A tételben szereplő konstans egy 2010-es eredmény szerint választható $C = 0.4748$-nak.)*

HF 3.2 Egy béka úgy ugrál a számegyenesen, hogy minden másodpercben $\frac{1}{3}$ valószínűséggel helyben ugrik, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel egyet ugrik előre, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel pedig kettőt, az előzményektől függetlenül. Kezdetben a 0-ban van. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a béka 1000 ugrással legalább 1300-ig eljut.

4.HF: (Beadási határidő: 2015.11.09.)



1. ábra. Markov lánc gráf-reprezentációja (valószínűségek nélkül)

HF 4.1 Az 1. ábrán látható gráf egy diszkrét idejű, időben homogén Markov lánc pozitív valószínűségű egylépéses átmeneteit mutatja. Osztályozzuk az állapotokat aszerint, hogy melyik melyikkel érintkezik! Minden osztályról állapítsuk megy, hogy

* zárt-e vagy nyílt,
* lényeges-e vagy lényegtelen,
* visszatérő-e vagy átmeneti,
* mennyi a periódusa.

HF 4.2 **Második változat, egy sajtóhiba javítása után.** Pistike olyan számítógépes kalandjátékot játszik, ahol öt pálya van 1-től 5-ig számozva. Minden menetben az előzményektől függetlenül $\frac{1}{4}$ valószínűséggel sikerül neki 1 pályával feljebb jutni, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel azonban egy pályával lejjebb csúszik - a maradék $\frac{1}{4}$ val.séggel marad a régi pályán. Kivétel ez alól, ha a legalsó (1-es) pályán van, mert akkor $\frac{3}{4}$ valószínűséggel marad (és továbbra is $\frac{1}{4}$ valószínűséggel jut eggyel feljebb), illetve ha a legfelső pályán van, mert akkor $\frac{1}{2}$ valószínűséggel marad (és továbbra is $\frac{1}{2}$ valószínűséggel csúszik eggyel lejjebb).

a.) Pistike az 1-es pályáról indul. Mennyi a valószínűsége, hogy 4 menet után már az 5-ös pályán játszik?

b.) Körülbelül mekkora a valószínűsége, hogy 100 menet után Pistike pont a 3-as pályán van? *(Szabad észrevenni, hogy az aktuális pálya száma születési-halálozási folyamat.)*

c.) Pistike a k-adik pályán mindig 2^k pontot szerez. Átlagosan hány pontot szerez menetenként hosszú távon?

d.) **Bónusz kérdés:** Mi a válasz a fenti kérdésekre, ha az elérhető pályák számára nincs felső korlát?

5.HF: (Beadási határidő: 2015.11.30.)

HF 5.1 Legyen $X(t)$ folytonos idejű Markov lánc az $S = \{1, 2, 3\}$ állapottéren, ami egy rendszer állapotát modellezi. *Az időt mérjük percben.* A rendszer az 1-es állapotban átlagosan 10 másodpercet tartózkodik, majd $\frac{1}{2}$ valószínűséggel a 2-es, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig a 3-as állapotba ugrik. A 2-es állapotban átlagosan 20 másodpercet tartózkodik, majd $\frac{1}{3}$ valószínűséggel az 1-es, $\frac{2}{3}$ valószínűséggel pedig a 3-as állapotba ugrik. Végül a 3-as állapotból átlagosan 15 másodperc után ugrik el, $\frac{1}{4}$ valószínűséggel az 1-es, $\frac{3}{4}$ valószínűséggel pedig a 2-as állapotba.

a.) Írjuk fel a Markov lánc λ tartózkodási idő paraméter vektorát és a beépített diszkrét idejű Markov lánc Q átmenetmátrixát.

b.) Írjuk fel a Markov lánc G infinitezimális generátorát.

c.) Keressük meg a stacionárius eloszlás(ok)at.

d.) Ha a rendszer $t = 0$ -kor az 1-es állapotból indul, körülbelül mekkora valószínűséggel lesz 60 perc elteltével a 2-es állapotban? Miért?

e.) Hosszú távon az idő hány százalékát tölti a rendszer a 3-as állapotban? Miért?

HF 5.2 Két áramköri elem ellenállását szeretnénk összehasonlítani, de sajnos az ellenállást csak hibával terhelten tudjuk mérni. Tegyük fel, hogy egy mérés eredménye normális eloszlású valószínűségi változó, aminek várható értéke a tényleges ellenállás, szórása pedig a mérőműszer jellemzője és ismeretlen, de minden mérés esetén azonos. Az egyes mérések hibái függetlenek. Mindkét ellenállást megmértük néhányszor, és a következő adatokat kaptuk ($M\Omega$-ban):

„A” ellenállás: 1000, 1023, 983, 1009, 990, 987, 988, 1009, 996

„B” ellenállás: 996, 995, 1004, 994, 1017, 1003, 1014

a.) Döntsünk 95%-os szinten arról a nullhipotézisről, hogy az „A” ellenállás legalább akkora, mint a „B”.

b.) Döntsünk 95%-os szinten arról a nullhipotézisről, hogy a „B” ellenállás legalább akkora, mint az „A”.