Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek – Sztochasztika
házi feladatok, 2016 ősz

Minden héten összesen 2 pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2016.09.28.)

HF 1.1 Van két, ránézésre egyforma hatoldalú dobókockánk, melyek közül az egyik szabályos, azaz minden lapja $\frac{1}{6}$ valószínűséggel kerül felülre, a másik viszont cinkelt: a 6-osnak $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, a többi számnak $\frac{1}{10} - \frac{1}{10}$. Találomra kiválasztjuk az egyik dobókockát, majd dobunk vele kétszer. Mekkora valószínűséggel választottuk a cinkelt kockát, feltéve, hogy mindkét dobás 6-os lett?

2.HF: (Beadási határidő: 2016.10.19.)

HF 2.1 Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}z + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{8}z^3 + \frac{1}{8}z^4 + cz^5$, ahol $c \in \mathbb{R}$.

a.) Mennyi c?

b.) Mennyi $\mathbb{P}(X = 4)$?

c.) Mennyi $\mathbb{E}X$?

HF 2.2 Egy nagyon nagy közösségben kezdetben egyetlen ember hordoz egy fertőző betegséget. Mielőtt meggyógyulna, továbbadja a betegséget X másik embernek, ahol X véletlen. Miután meggyógyult, nem fertőz tovább. Minden további fertőzött ember a többiektől függetlenül és ugyanilyen eloszlással megfertőz újabb embereket, mielőtt meggyógyul. Modellezzük elágazó folyamattal a történteket. Az n-edik generáció létszámát jelölje Z_n. Adjunk választ a következő kérdésekre akkor, ha

I. X binomiális eloszlású $n = 3$, $p = \frac{1}{2}$ paraméterrel.

II. X pesszimista geometriai eloszlású $p = 0.6$ paraméterrel.

a.) Mennyi X várható értéke?

b.) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első emberen kívül senki más nem fertőz tovább (azaz a második generáció létszáma 0)?

c.) Határozzuk meg $\mathbb{E}Z_3$-at.

d.) Mekkora annak a valószínűsége, hogy semelyik generáció sem hal ki? (Ez az esemény felel meg a járvány kialakulásának.)

e.) Jelölje N az összes megbetegedés számát. Határozzuk meg N várható értékét.

f.) *Bónusz feladat:* Határozzuk meg N generátorfüggvényét – ha ez értelmes. (Tipp: használjunk teljes várható érték tételt az első generáció létszáma szerint.)

3.HF: (Beadási határidő: 2016.10.26.)

HF 3.1 Egy szélfarmon 400 A típusú és 200 B típusú szélerőművet telepítettek. Az A típusú termelése 0,5 MW és 1,6 MW között ingadozik 1 MW átlagos termeléssel. A B típusú termelése 1,2 MW és 2,8 MW között van, átlagosan 2 MW.

(a) Számítsuk ki, hogy mekkora az a kapacitás, amiről biztosan tudhatjuk, hogy legalább $1 - 10^{-8}$ valószínűséggel nem lép túl a 600 erőmű össztermelése. (Adjunk nem triviális, használható korlátot.)

(b) Mekkora valószínűséggel lépi túl $C = 800$ MW-t az aktuális termelés?

(c) Tegyük fel, hogy a B típusúak mind be vannak kapcsolva. Ha $C = 800$ MW-ot nem szeretnénk túllépni legalább $1 - 10^{-8}$ valószínűséggel, akkor hány A típusú erőművet kapcsoljunk be?

(Megjegyzés: éljünk azzal a (távolról sem realisztikus) feltevéssel, hogy az egyes erőművek termelései függetlenek.)

4.HF: (Beadási határidő: 2016.11.16.)

HF 4.1 Egy ipari gép intenzív használatnak van kitéve, ezért minden nap elején megvizsgálják. A következő állapotok valamelyikébe sorolják:

0 új
1 működőképes, enyhén használt
2 működőképes, erősen használt
3 működésképtelen, cserélni kell (új gépre)

Ha a gép működésképtelen, másnap reggelre kicserélik. Modellezzük az állapotok sorozatát Markov lánccal. Az átmenetvalószínűségek mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Feltéve, hogy ma reggel a gép az 1-es állapotban volt, mekkora a valószínűsége, hogy holnap ÉS holnapután reggel is 1-es állapotban lesz?

(b) Határozzuk meg a stacionárius eloszlást.

(c) A működési költségek a 0, 1, 2 állapotokban rendre 0, 700, 2100 forint naponta; a 3-as állapotban a költség egy új gép ára, 7000 forint. Határozzuk meg a teljes napi átlagos költséget hosszú távon. Átlagosan mennyi ebből az új gépek vásárlására költött összeg?

(d) Határozzuk meg, hány napig használnak átlagosan egy gépet, mielőtt cserélni kell.

5.HF: (Beadási határidő: 2016.12.07.)

HF 5.1 Egy posta ügyfelterében két kiszolgáló ablak működik. Az ügyféltérben az ablakoknál állókkal együtt legfeljebb 6 ügyfél tartózkodhat; az ilyenkor érkező további ügyfeleket a biztonsági őr kiszolgálás nélkül elküldi. Ha egy ablak felszabadul, a soron következő ügyfél azonnal beáll. Ha olyankor érkezik egy ügyfél, amikor mindkét ablak szabad, akkor találomra áll be valamelyikhez. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 5 perc, és az ügyfelek átlagosan 4 percenként érkeznek.

a.) Modellezzük a rendszert Markov-lánccal. Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.

b.) Határozzuk meg a stacionárius állapotot.

c.) Az idő mekkora részében üres az ügyféltér?

d.) Az idő mekkora részében tétlen az első ablaknál dolgozó kisasszony?

e.) Az ügyfelek mekkora részét küldik el amiatt, hogy tele van az ügyféltér?