Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek – Sztochasztika
házi feladat megoldások, 2016 ősz

Minden héten összesen 2 pontot érnek a kitűzött feladatok.

1.HF: (Beadási határidő: 2016.09.28.)

HF 1.1 Van két, ránézésre egyforma hatoldalú dobókockánk, melyek közül az egyik szabályos, azaz minden lapja $\frac{1}{6}$ valószínűséggel kerül felülre, a másik viszont cinkelt: a 6-osnak $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, a többi számnak $\frac{1}{10} - \frac{1}{10}$. Találomra kiválasztjuk az egyik dobókockát, majd dobunk vele kétszer. Mekkora valószínűséggel választottuk a cinkelt kockát, feltéve, hogy mindkét dobás 6-os lett?

Megoldás: Jelölje A_1 azt az eseményt, hogy a cinkelt kockát választottuk, A_2 pedig azt, hogy a szabályosat. Ekkor $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \frac{1}{2}$. Jelölje B azt az eseményt, hogy mindkét dobás 6-os. $\mathbb{P}(B|A_1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(B|A_2) = \frac{1}{36}$, mi pedig a $\mathbb{P}(A_1|B)$ feltételes valószínűséget keressük. A Bayes tétel szerint

$$\mathbb{P}(A_1|B) = \frac{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(B|A_2)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{36}} = \frac{9}{9+1} = \frac{9}{10}.$$

Megjegyzés: $\mathbb{P}(B|A_1)$ *azért* $\frac{1}{4}$, *mert a két dobás külön-külön* $\frac{1}{2}$ ***feltételes*** *valószínűséggel 6-os (feltéve, hogy a cinkelt kockával dobunk), és a két dobás eredménye* ***feltételesen független*** *(megint csak feltéve, hogy a cinkelt kockával dobunk).* $\mathbb{P}(B|A_2) = \frac{1}{36}$ *ugyanilyen okból. Az viszont* ***nem igaz****, hogy a két dobás eredménye független lenne.*

2.HF: (Beadási határidő: 2016.10.19.)

HF 2.1 Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}z + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{8}z^3 + \frac{1}{8}z^4 + cz^5$, ahol $c \in \mathbb{R}$.

a.) Mennyi c?

b.) Mennyi $\mathbb{P}(X = 4)$?

c.) Mennyi $\mathbb{E}X$?

Megoldás:

a.) Mivel minden generátorfüggvényre $g(1) = 1$, $c = \frac{1}{4}$.

b.) Definíció szerint $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} p_z^k$ ahol $p_k = \mathbb{P}(X = k)$, ezért $p_4 = \mathbb{P}(X = 4)$ éppen a z^4 együtthatója a $g(z)$ Taylor sorfejtésében. Ám mivel $g(z)$ polinom, már eleve sorba van fejtve, és csak le kell olvasni, hogy $p_4 = \frac{1}{8}$.

c.) $\mathbb{E}X = g'(1) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{8}\cdot 1 + \frac{1}{8}\cdot 2 + \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{1}{8}\cdot 4 + c\cdot 5 = \frac{5}{2}$.
Avagy persze $\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{5} kp_k = \frac{5}{2}$.

HF 2.2 Egy nagyon nagy közösségben kezdetben egyetlen ember hordoz egy fertőző betegséget. Mielőtt meggyógyulna, továbbadja a betegséget X másik embernek, ahol X véletlen. Miután meggyógyult, nem fertőz tovább. Minden további fertőzött ember a többiektől függetlenül és ugyanilyen eloszlással megfertőz újabb embereket, mielőtt meggyógyul. Modellezzük elágazó folyamattal a történteket. Az n-edik generáció létszámát jelölje Z_n. Adjunk választ a következő kérdésekre akkor, ha

I. X binomiális eloszlású $n = 3$, $p = \frac{1}{2}$ paraméterrel.

II. X pesszimista geometriai elsozlású $p = 0.6$ paraméterrel.

a.) Mennyi X várható értéke?

b.) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első emberen kívül senki más nem fertőz tovább (azaz a második generáció létszáma 0)?

c.) Határozzuk meg $\mathbb{E}Z_3$-at.

d.) Mekkora annak a valószínűsége, hogy semelyik generáció sem hal ki? (Ez az esemény felel meg a járvány kialakulásának.)

e.) Jelölje N az összes megbetegedés számát. Határozzuk meg N várható értékét.

f.) *Bónusz feladat:* Határozzuk meg N generátorfüggvényét – ha ez értelmes. (Tipp: használjunk teljes várható érték tételt az első generáció létszáma szerint.)

Megoldás: Z_n Galton-Watson elágazó folyamat, egylépéses utódszáma X, annak várható értéke legyen m, generátorfüggvénye legyen g.

I. X binomiális eloszlású $n = 3$, $p = \frac{1}{2}$ paraméterrel. Ekkor $m = \frac{3}{2}$, $g(z) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right)^3$.

a.) $\mathbb{E}X = m = \frac{3}{2}$.

b.) Legyen $r_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$. Erről tudjuk, hogy $r_0 = 0$ és $r_{n+1} = g(r_n)$, így

* $r_1 = g(0) = \frac{1}{8}$
* $r_2 = g(\frac{1}{8}) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}\right)^3 = \frac{729}{4096} \approx 0.18$

c.) $m_3 := \mathbb{E}Z_3 = m^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3.375$

d.) mivel $m > 1$, a folyamat szuperkritikus. Így a kihalás valószínűsége 1-nél kisebb, és számolni kell: A kihalás valószínűsége, r_∞ éppen a $g(z) = z$ egyenlet egyetlen $[0, 1)$-beli megoldása:

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}z\right)^3 = z.$$

Ez egy harmadfokú egyenlet, nullára rendezve

$$z^3 + 3z^2 - 5z + 1 = 0$$

mivel tudjuk, hogy $z = 1$ biztosan megoldás, abban is biztosak lehetünk, hogy a baloldal szorzattá alakítható, vagyis kiemelhető belőle $(z - 1)$. és valóban:

$$(z - 1)(z^2 + 4z - 1) = 0,$$

amiből $z = 1$ vagy $z^2 + 4z - 1 = 0$. Ez uóbbi másodfokú egyenlet megoldásai $z_1 = -2 - \sqrt{5} < 0$ és $z_2 = -2 + \sqrt{5} \approx 0.236$. Vagyis az egyetlen $[0, 1)$-beli megoldás $r_\infty = -2 + \sqrt{5}$. A kérdésre a válasz pedig

$$\mathbb{P}(\text{a folyamat nem hal ki}) = 1 - r_\infty = 3 - \sqrt{5} \approx 0.764$$

e.) A folyamat szuperkritikus, így $\mathbb{E}N = \infty$.

f.) Mivel a kihalás valószínűsége 1-nél kisebb, N pozitív valószínűséggel végtelen. Ilyen val.változó generátorfüggvényéről nem beszéltünk, és most írni sem fogok.

II. X pesszimista geometriai elsozlású $p = 0.6$ paraméterrel. Ekkor $m = \frac{1}{p} - 1 = \frac{2}{3}$, $g(z) = \frac{p}{1-qz} = \frac{6}{10-4z}$.

a.) $\mathbb{E}X = m = \frac{2}{3}$.

b.) Legyen $r_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$. Erről tudjuk, hogy $r_0 = 0$ és $r_{n+1} = g(r_n)$, így

* $r_1 = g(0) = \frac{6}{10}$
* $r_2 = g(\frac{6}{10}) = \frac{15}{19}$

c.) $m_3 := \mathbb{E}Z_3 = m^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \approx 0.30$

d.) mivel $m < 1$, a folyamat szubkritikus. Így a kihalás valószínűsége $r_\infty = 1$. A kérdésre a válasz pedig

$$\mathbb{P}(\text{a folyamat nem hal ki}) = 1 - r_\infty = 0.$$

e.) A folyamat szubkritikus, így $\mathbb{E}N = \frac{1}{1-m} = 3$.

f.) Mivel a kihalás valószínűsége 1, N egy valószínűséggel véges (és nemnegatív egész értékű), így értelmes a generátorfüggvényéről beszélni. Előadáson láttuk, hogy ez a $g_N(z)$ generátorfüggvény eleget tesz a

$$g_N(z) = zg(g_N(z))$$

függvényegyenletnek. Vagyis ha rögzített z mellett $g_N(z)$-t eljelöljük $y := g_N(z)$-vel, akkor

$$y = zg(y) = z\frac{6}{10-4y},$$

ami átrendezve

$$2y^2 - 5y + 3z = 0.$$

Ennek megoldásai

$$y_1 = \frac{5-\sqrt{25-24z}}{4} \quad \text{és} \quad y_2 = \frac{5+\sqrt{25-24z}}{4}.$$

Így a keresett generátorfüggvény ezek egyike, vagyis

$$g_N(z) = \frac{5-\sqrt{25-24z}}{4} \quad \text{vagy} \quad g_N(z) = \frac{5+\sqrt{25-24z}}{4}.$$

Hogy ezek közül melyik, azt eldönthetjük pl. úgy, hogy ellenőrizzük a $g_N(1) = 1$ tulajdonság teljesülését. Látható, hogy ez az első megoldásra teljesül, a másodikra viszont nem, vagyis

$$g_N(z) = \frac{5-\sqrt{25-24z}}{4}.$$

3.HF: (Beadási határidő: 2016.10.26.)

HF 3.1 Egy szélfarmon 400 A típusú és 200 B típusú szélerőművet telepítettek. Az A típusú termelése 0,5 MW és 1,6 MW között ingadozik 1 MW átlagos termeléssel. A B típusú termelése 1,2 MW és 2,8 MW között van, átlagosan 2 MW.

(a) Számítsuk ki, hogy mekkora az a kapacitás, amiről biztosan tudhatjuk, hogy legalább $1-10^{-8}$ valószínűséggel nem lép túl a 600 erőmű össztermelése. (Adjunk nem triviális, használható korlátot.)

(b) Mekkora valószínűséggel lépi túl $C = 800$ MW-t az aktuális termelés?

(c) Tegyük fel, hogy a B típusúak mind be vannak kapcsolva. Ha $C = 800$ MW-ot nem szeretnénk túllépni legalább $1 - 10^{-8}$ valószínűséggel, akkor hány A típusú erőművet kapcsoljunk be?

(Megjegyzés: éljünk azzal a (távolról sem realisztikus) feltevéssel, hogy az egyes erőművek termelései függetlenek.)

Megoldás:

a.) Legyen $n = 600$ és legyen $i = 1, 2, \dots, n$-re X_i az i-edik erőmű termelése MW-ban. A feltevés szerint az X_i-k függetlenek és korlátosak, valamint ismert a várható értékük: $\mathbb{E}X_i = 1$ és $a_i \leq X_i \leq b_i$, ahol $a_i = 0.5$ és $b_i = 1.6$ az i-k közül 400-ra, a maradék 200-ra pedig $\mathbb{E}X_i = 2$, $a_i = 1.2$ és $b_i = 2.8$.
Legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ a 600 erőmű össztermelése. Keressünk egy olyan K-t, amire $\mathbb{P}(S_n \leq K) \geq 1 - 10^{-8}$, vagyis $\mathbb{P}(S_n > K) \leq 10^{-8}$. A Hoeffding egyenlőtlenség szerint $t > 0$-ra

$$\mathbb{P}(S_n \geq \mathbb{E}S_n + t) \leq \exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right\}.$$

Ha t-t úgy választjuk, hogy a jobboldal 10^{-8} legyen, akkor $K := \mathbb{E}S_n + t$ jó lesz a keresett korlátnak.
Számolások:

$$\mathbb{E}S_n = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}X_i = 400 \cdot 1 + 200 \cdot 2 = 800$$

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 = 400(1.6 - 0.5)^2 + 200(2.8 - 1.2)^2 = 996$$

vagyis t kereséséhez megoldandó az

$$\exp\left\{-\frac{2t^2}{996}\right\} = 10^{-8}$$

egyenlet. Minkét oldal természetes logaritmusát véve

$$-\frac{2t^2}{996} = -8 \ln 10,$$

amiből

$$t = \sqrt{4 \cdot 996 \cdot \ln 10} \approx 96.$$

Vagyis

$$K = \mathbb{E}S_n + t = 800 + 96 = 896$$

jó lesz korlátnak.

b.) Mivel 800MW éppen a termelés várató értéke, ezt kb. $\frac{1}{2}$ valószínűséggel lépi át. *(Precízebb indoklás, csak a kíváncsiaknak: Csoportosítsuk az erőműveket hármasával: minden hármas csoportba jusson két A és egy B típusú erőmű. Egy-egy ilyen hármas csoport össz-termelését jelöljük Y_j-vel, ahol $j = 1, 2 \dots, 200$. Így a teljes termelés $S_{200} = \sum_{j=1}^{200} Y_j$, valamint az Y_j-k függetlenek és azonos eloszlásúak. Ezért alkalmazható rájuk a centrális határeloszlás tétel (annak is legegyszerűbb változata, ami az órán szerepelt). Legyen $m = \mathbb{E}Y_i = 2 \cdot 1 + 2 = 4$ és legyen σ az Y_i szórása, amit nem ismerünk, de sebaj. Ezekkel a CHT szerint*

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_{200} - 200m}{\sqrt{200}\sigma} \leq x\right) \approx \Phi(x),$$

ahol Φ a standard normális eloszlásfüggvény. Ugyanez átírva

$$\mathbb{P}(S_{200} \leq 800 + \sqrt{200}\sigma x) \approx \Phi(x).$$

Mivel minket szerencsére pont a $\mathbb{P}(S_n \leq 800)$ érdekel, $x = 0$ jó lesz, és σ-t nem is kell ismerni:

$$\mathbb{P}(S_{200} \leq 800) = \mathbb{P}(S_{200} \leq 800 + \sqrt{200}\sigma \cdot 0) \approx \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Ebből persze

$$\mathbb{P}(S_{200} > 800) \approx 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

)

c.) Legyen k a bekapcsolt A típusú erőművek (egyelőre ismeretlen) száma. Így a teljes termelés $S_n = X_i + \cdots + X_n$ ahol $n = 200 + k$, és X_i továbbra is az i-edik erőmű termelése. Ezúttal $a_i \leq X_i \leq b_i$ úgy teljesül, hogy 200 darab i-re $a_i = 1.2$ és $b_i = 2.8$, a maradék k darab i-re pedig $a_i = 0.5$ és $b_i = 1.6$. Ezért most

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i)^2 = 200(2.8 - 1.2)^2 + k(1.6 - 0.5)^2 = 512 + 1.21k.$$

Továbbá 200 darab i-re $\mathbb{E}X_i = 2$, a maradék k darab i-re pedig $\mathbb{E}X_i = 1$, vagyis

$$\mathbb{E}S_n = 200 \cdot 2 + k \cdot 1 = 400 + k.$$

A Hoeffding egyenlőtlenség alkalmazásához legyen $\mathbb{E}S_n + t = 800$, vagyis

$$t = 800 - \mathbb{E}S_n = 800 - (400 + k) = 400 - k.$$

Így a Hoeffding egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \geq 800) &= \mathbb{P}(S_n \geq \mathbb{E}S_n + t) \\ &\leq \exp\left\{ -\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2} \right\} = \exp\left\{ -\frac{2(400 - k)^2}{512 + 1.21k} \right\}. \end{aligned}$$

k-t úgy választjuk hogy a jobboldal 10^{-8}-nál kevesebb legyen, vagyis

$$\exp\left\{ -\frac{2(400 - k)^2}{512 + 1.21k} \right\} < 10^{-8}.$$

Mindkét oldal természetes logaritmusát véve

$$-\frac{2(400 - k)^2}{512 + 1.21k} < -8 \ln 10,$$

vagyis

$$(400 - k)^2 > 4 \ln 10 \cdot (512 + 1.21k),$$

ami egy másodfokú egyenlőtlenség. Nullára rendezve

$$k^2 + (-800 - 4.84 \ln 10) + (400^2 - 2048 \ln 10) > 0.$$

A polinom zérushelyei

$$k_1 \approx 309.63 \quad , \quad k_2 \approx 501.51,$$

vagyis a megoldás

$$k < 309.63 \quad \text{vagy} \quad k > 501.51.$$

Ebből a második hamis megoldás, mert $t < 0$ lenne, márpedig a Hoeffding egyenlőtlenség csak $t \geq 0$-val igaz (meg egyébként sincs 502 A típusú erőmű). Vagyis legfeljebb $k_{max} = 309$ A típusú erőművet kapcsolhatunk be, ha biztosak akarunk lenni abban, hogy az össz-termelés $1 - 10^{-8}$ valószínűséggel 800 MW alatt marad. *(Megjegyzés:* $k = 309$ *esetén* $\mathbb{E}S_n = 709$, $t = 91$, $\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2 = 885.89$, *így*

$$\mathbb{P}(S_n \geq 800) = \mathbb{P}(S_n \geq \mathbb{E}S_n + t) \leq \exp\left\{ -\frac{2 \cdot 91^2}{885.89} \right\} \approx 7.6 \cdot 10^{-9}.$$

)

4.HF: (Beadási határidő: 2016.11.16.)

HF 4.1 Egy ipari gép intenzív használatnak van kitéve, ezért minden nap elején megvizsgálják. A következő állapotok valamelyikébe sorolják:

0	új
1	működőképes, enyhén használt
2	működőképes, erősen használt
3	működésképtelen, cserélni kell (új gépre)

Ha a gép működésképtelen, másnap reggelre kicserélik. Modellezzük az állapotok sorozatát Markov lánccal. Az átmenetvalószínűségek mátrixa a következő:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Feltéve, hogy ma reggel a gép az 1-es állapotban volt, mekkora a valószínűsége, hogy holnap ÉS holnapután reggel is 1-es állapotban lesz?

(b) Határozzuk meg a stacionárius eloszlást.

(c) A működési költségek a 0, 1, 2 állapotokban rendre 0, 700, 2100 forint naponta; a 3-as állapotban a költség egy új gép ára, 7000 forint. Határozzuk meg a teljes napi átlagos költséget hosszú távon. Átlagosan mennyi ebből az új gépek vásárlására költött összeg?

(d) Határozzuk meg, hány napig használnak átlagosan egy gépet, mielőtt cserélni kell.

Megoldás: Legyen $S = \{0, 1, 2, 3\}$ az állapottér, és legyen $X_n \in S$ a gép állapota az n-edik nap elején a vizsgálatkor.

(a) Legyen ma az $n = 0$-adik nap. Így $\mathbb{P}(X_0 = 1, X_1 = 1, X_2 = 1 | X_0 = 1) = P_{11}P_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

(b) A $\pi = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ stacionárius eloszlás (sorvektor) kereséséhez a $(P^T - I)\pi^T$ homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldani, ahol I az egységmátrix. Esetünkben

$$P^T - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 3/4 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 3/4 & -1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

vagyis a lineáris egyenletrendszer

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3/4 \\ 3/4 & -1/2 & 0 & 1/4 \\ 1/8 & 1/4 & -1/2 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ugyanez a szokásos mátrix-jelöléssel, az ismeretlenek kiírása nélkül

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 3/4 & -1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Ezt Gauss eliminációval oldom meg:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 3/4 & -1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/4 & 1/2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 13/16 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/2 & 3/32 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & -29/32 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 13/8 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 16/32 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -16/32 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 13/8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Az egyenleteket kiolvasva: $\pi_0 = \frac{3}{4}\pi_3$, $\pi_1 = \frac{13}{8}\pi_3$, $\pi_2 = \pi_3$. Tehát pl. $\pi_3 = 8$ választással egy megoldás a $\tilde{\pi} = (6, 13, 8, 8)$ sorvektor. A(z egyetlen) stacionárius megoldás ennek normalizált változata:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{6}{35} & \frac{13}{35} & \frac{8}{35} & \frac{8}{35} \end{pmatrix}.$$

(c) Bár nem sikerült teljesen világosan megfogalmaznom, én úgy értettem a feladatot, hogy ha egy reggel a gépet az i állapotban találják, akkor az aznapi költség forintban $f(i)$, ahol az $f : S \to \mathbb{R}$ függvényt az

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 700 \\ 2100 \\ 7000 \end{pmatrix}$$

oszlopvektor adja meg. Az ergodtétel szerint az $f(X_n)$ költség időátlaga hosszú távon

$$\mathbb{E}_\pi f = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f = \begin{pmatrix} \frac{6}{35} & \frac{13}{35} & \frac{8}{35} & \frac{8}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 700 \\ 2100 \\ 7000 \end{pmatrix} = 0 + 260 + 480 + 1600 = 2340.$$

Ha csak az új gépek vásárlására fordított összegre vagyunk kíváncsiak, akkor a $g(X_n)$ időátlagát számoljuk, ahol

$$g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7000 \end{pmatrix}.$$

Így az időátlag

$$\mathbb{E}_\pi g = \sum_{i \in S} \pi_i g(i) = \pi g = \begin{pmatrix} \frac{6}{35} & \frac{13}{35} & \frac{8}{35} & \frac{8}{35} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 7000 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 + 1600 = 1600.$$

(d) Vegyük észre, hogy pontosan annyiszor kell a gépet cserélni, ahányszor a Markov lánc a 3-as állapotba kerül. (Ennek megfelelően az állapottéren lefelé lépni csak a 3-as állapotból lehet.) Nézzük meg, hogy hosszú távon az idő hányad részét tölti a rendszer a 3-as állapotban? Ez éppen az $F(X_n)$ időátlaga, ahol

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Az ergodtétel szerint tehát az időátlag

$$\mathbb{E}_\pi F = \sum_{i\in S} \pi_i F(i) = \pi g = \begin{pmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \pi_3 = \frac{8}{35}.$$

Innentől az érvelésem nem szigorú, de hihető: Ezek szerint 1000000 nap alatt körülbelül $\frac{8}{35}\cdot 1000000$ gépet használnak el, vagyis az átlagos élettartam

$$\frac{1000000}{\frac{8}{35}\cdot 1000000} = \frac{35}{8} = 4.375$$

nap.

5.HF: (Beadási határidő: 2016.12.07.)

HF 5.1 Egy posta ügyfélterében két kiszolgáló ablak működik. Az ügyféltérben az ablakoknál állókkal együtt legfeljebb 6 ügyfél tartózkodhat; az ilyenkor érkező további ügyfeleket a biztonsági őr kiszolgálás nélkül elküldi. Ha egy ablak felszabadul, a soron következő ügyfél azonnal beáll. Ha olyankor érkezik egy ügyfél, amikor mindkét ablak szabad, akkor találomra áll be valamelyikhez. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 5 perc, és az ügyfelek átlagosan 4 percenként érkeznek.

a.) Modellezzük a rendszert Markov-lánccal. Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.

b.) Határozzuk meg a stacionárius állapotot.

c.) Az idő mekkora részében üres az ügyféltér?

d.) Az idő mekkora részében tétlen az első ablaknál dolgozó kisasszony?

e.) Az ügyfelek mekkora részét küldik el amiatt, hogy tele van az ügyféltér?

Megoldás:

a.) Legyen $X(t)$ a t idő elteltével bent lévő ügyfelek száma Az időt mérjük percben. Így az állapottér $S = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Mivel egyszerre 1 valószínűséggel csak 1 ügyfél érkezhet vagy távozhat, ugrás csak szomszédos állapotokba történhet. A felfelé ugrás rátája persze minden állapotból az ügyfelek érkezésének rátája. Az, hogy az ügyfelek „átlagosan 4 percenként érkeznek”, azt jelenti, hogy a ráta $\frac{1}{4}$, vagyis percenként átlagosan $\frac{1}{4}$ ügyfél érkezik (kivéve, ha már 6 van bent). Tehát a felfelé ugrási ráták

$$\lambda_{01} = \lambda_{12} = \lambda_{23} = \lambda_{34} = \lambda_{45} = \lambda_{56} = \frac{1}{4}.$$

A lefelé ugrásokkal jobban észnél kell lenni:

– Ha csak 1 ügyfél van bent, akkor az őt kiszolgáló postáskisasszony $\frac{1}{5}$ rátával végez, vagyis $\lambda_{10} = \frac{1}{5}$.

– Ha viszont 2 vagy több ügyfél van bent, akkor mindkét postáskisasszony dolgozik, és lefelé ugrás akkor történik, ha *valamelyikük=bármelyikük* végez. Ennek rátája pedig már $2\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$. Ezért

$$\lambda_{21} = \lambda_{32} = \lambda_{43} = \lambda_{54} = \lambda_{65} = \frac{2}{5}.$$

A többi ugrási ráta nulla, így a ráta-mátrix

$$\underline{\underline{\lambda}} = \begin{pmatrix} * & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & * & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & * & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & * & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & * & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & * & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & * \end{pmatrix}.$$

Az infinitezimális generátort ebből úgy kapjuk, hogy a főátlót kitöltjük úgy, hogy minden sorösszeg 0 legyen:

$$G = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{9}{20} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & -\frac{13}{20} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{13}{20} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{13}{20} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{13}{20} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

b.) A stacionárius eloszlás a $G^T \pi^T = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldása. A szokásos bővített mátrix jelöléssel ez úgy néz ki, hogy

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{9}{20} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{13}{20} & \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{13}{20} & \frac{2}{5} & 0 & 0. & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{13}{20} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{13}{20} & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{2}{5} & 0 \end{array}\right).$$

Ez eliminációval rövid úton arra vezet, hogy

$$\frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{4}{5}, \quad \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{8}{5}, \quad \frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{8}{5}, \quad \frac{\pi_3}{\pi_4} = \frac{8}{5}, \quad \frac{\pi_4}{\pi_5} = \frac{8}{5}, \quad \frac{\pi_5}{\pi_6} = \frac{8}{5}.$$

Ebből pl. $\tilde{\pi}_6 := 5^6$ választással egy megoldás a

$$\begin{aligned} \tilde{\pi} &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 8^5 & 8^5 \cdot 5 & 8^4 \cdot 5^2 & 8^3 \cdot 5^3 & 8^2 \cdot 5^4 & 8 \cdot 5^5 & 5^6 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 131072 & 163840 & 102400 & 64000 & 40000 & 25000 & 15625 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ebben a sorösszeg nem 1, hanem 541937, ezért lenormáljuk, hogy megkapjuk az egyetlen stacionárius eloszlást:

$$\begin{aligned} \pi &= \begin{pmatrix} \frac{131072}{541937} & \frac{163840}{541937} & \frac{102400}{541937} & \frac{64000}{541937} & \frac{40000}{541937} & \frac{25000}{541937} & \frac{15625}{541937} \end{pmatrix} \approx \\ &\approx \begin{pmatrix} 0.242 & 0.302 & 0.189 & 0.118 & 0.074 & 0.046 & 0.029 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

c.) Legyen az $f : S \to \mathbb{R}$ függvény az, hogy $f(0) = 1$ és $f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = f(6) = 0$. Avagy $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ (oszlopvektor). Így az, hogy az idő mekkora részében üres az ügyféltér, éppen az $f(X(t))$ függvény időátlaga. Mivel a Markov lánc folytonos idejű, irreducibilis és véges állapotterű, az ergodtétel szerint ez az időátlag hosszú távon

$$\mathbb{E}_\pi f = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f = \pi_0 \approx 0.242.$$

d.) Az első ablaknál dolgozó kisasszony akkor tétlen, ha $X(t) = 0$, illetve annak az időnek a felében is (hosszú távon), amikor $X = 1$. Az előzőhöz hasonlóan számolva tehát az idő

$$\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 \approx 0.393$$

hányadában, vagyis 39.3%-ában tétlen.

e.) Az előzőekhez hasonlóan az ügyféltér az idő $\pi_6 \approx 0.029$ hányadában van tele. Mivel az ügyfelek (beszámítva az elküldötteket is) egyenletesen érkeznek (Poisson folyamat szerint), függetlenül az ügyféltér telítettségétől, persze pont ugyanekkora, vagyis $\pi_6 \approx 0.029 = 2.9\%$-uk érkezik rosszkor.