Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika
1. ZH megoldások

2016 ősz, 2016.10.20 18:00

Munkaidő: 90 perc. A nulladik feladat 0 pontos, a többi mind 9 pontot ér.

0. Írja rá a ZH-ra a *gyakorlatvezető nevét* és a *gyakorlat napját* (meg persze a saját nevét és Neptun-kódját is). Lehetséges helyes megoldások:

   - Kói Tamás, kedd (H607, korábban T603)
   - Kói Tamás, péntek (V1103)
   - Morvai Gusztáv, kedd (R505)
   - Morvai Gusztáv, péntek (E401)

1. Pistike addig dobál egy piros szabályos dobókockával, amíg ki nem jön a 6-os. Ekkor Móricka dob egyet a maga kék (szabályos) kockájával. Ha neki is 6-os jön ki, megállnak – ellenkező esetben kezdik az egészet elölről. Legyen N a Móricka dobásainak száma, M pedig a Pistike dobásainak száma.

   a.) (2 pont) Mennyi N várható értéke?

   b.) (5 pont) Mennyi M várható értéke?

   c.) (2 pont) Jancsika addig dobál egy szabályos dobókockával, amíg kétszer egymás után ki nem jön neki a 6-os. Mennyi a dobások számának várható értéke?

   Megoldás:

   a.) Mivel Móricka lényegében addig dobál a kék kockával, amíg ki nem jön a hatos, N (optimista) geometriai eloszlású $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel, így $\mathbb{E}N = \frac{1}{p} = 6$.

   b.) Legyen X_i a Pistike i-edik hatosához szükséges dobások száma. Így az X_i-k szintén optimista geometriaiak $p = \frac{1}{6}$ paraméterrel, és

   $$M = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

   véletlen tagszámú összeg. Erről tudjuk (vagy a teljes várható érték tétellel könnyen kiszámolható), hogy

   $$\mathbb{E}M = \mathbb{E}N \cdot \mathbb{E}X_i = 6 \cdot 6 = 36.$$

   c.) Jancsika egyedül dob annyit, mint Pistike és Móricka összesen, vagyis a dobásai számának várható értéke

   $$\mathbb{E}(M + N) = \mathbb{E}M + \mathbb{E}N = 36 + 6 = 42.$$

2. Móricka havonta átlagosan 2 szaktanári és 1 osztályfőnöki figyelmeztetést visz haza az iskolából. Ezen felül átlagosan kéthavonta egy igazgatói figyelmeztetést is szerez. Mennyi a valószínűsége, hogy a novembert megússza legfeljebb két figyelmeztetéssel? (Móricka iskolájában az egyes figyelmeztetések egymástól függetlenül kaphatók.)

   Megoldás: Modellezzük a figyelmeztetéseket Poisson folyamattal, az időt mérjük hónapokban. Így az egyes figyelmeztetés-fajták külön-külön, de együtt is Poisson folyamatot alkotnak. (Ez megfelel annak, hogy független Poisson folyamatok uniója is Poisson folyamat – avagy, az egyes figyelmeztetés-fajták folyamatai a teljes folyamat ritkításai.)

Minket csak az összes figyelmeztetés együttes folyamata érdekel: ennek rátája 3.5, mert havi átlagban ennyi figyelmeztetést kap.

Legyen X a novemberben kapott figyelmeztetések száma. A fentieknek megfelelően X Poisson eloszlású $\lambda = 3.5$ paraméterrel, vagyis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 2) &= \mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=2) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}+e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!}+e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} = \\ &= e^{-3.5}\left(1+3.5+\frac{3.5}{2}\right) \approx 0.32\end{aligned}$$

3. Ede autójában a két tompított fényszóró izzóinak élettartama egymástól független és exponenciális eloszlású, az átlagos élettartam 6 hónap. Ha egy izzó kiég, azonnal újra cseréli. Mennyi a valószínűsége, hogy egész télen nem kell izzót cserélnie?

   1. megoldás: Az izzók kiégési pillanatai együttesen Poisson folyamatot alkotnak. (A két fényszóróra külön-külön is, de minket az együttes folyamat érdekel.) A két fényszóróban összesen átlag 2 izzó ég ki 6 hónap alatt, vagyis 3 hónap alatt átlagosan 1. Legyen X a télen (vagyis 3 hónap alatt) kiégő izzók száma. A fentiek szerint X Poisson eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel, vagyis

$$\mathbb{P}(X=0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda} = e^{-1} \approx 0.378$$

   2. megoldás: Legyen T_1 a baloldali izzó élettartama december 1-től mérve hónapokban, T_2 pedig a jobboldalié. A feladat szerint $T_1, T_2 \sim Exp(\lambda)$ függetlenek, és $\mathbb{E}T_1 = \mathbb{E}T_2 = \frac{1}{\lambda} = 6$. közös eloszlásfüggvényük

$$F(t) = \mathbb{P}(T_1 \leq t) = \mathbb{P}(T_2 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} = 1 - e^{-\frac{1}{6}t} \ (t \geq 0\text{-ra}).$$

   Annak a valószínűsége, hogy február 28-ig egyik se ég ki, a függetlenség miatt

$$\mathbb{P}(T_1 > 3 \text{ és } T_2 > 3) = \mathbb{P}(T_1 > 3)\mathbb{P}(T_2 > 3) = (1-F(3))^2 = \left(e^{-\frac{1}{6}\cdot 3}\right)^2 = e^{-1} \approx 0.378$$

4. Az X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = c(z+z^3+z^5+z^7+z^9+z^{11}+z^{13}+z^{15})$.

   a.) (1 pont) Mennyi a c konstans értéke?

   b.) (4 pont) Mennyi X várható értéke?

   c.) (4 pont) Mennyi a $\mathbb{P}(X=10)$ valószínűség?

   Megoldás:

   a.) $g(1) = 1$ mindig, vagyis $c = \frac{1}{8}$.

   b.) $\mathbb{E}X = g'(1) = \frac{1}{8}(1+3z^2+5z^4+7z^6+9z^8+11z^{10}+13z^{12}+15z^{14})\,|_{z=1} = 8$.
   Avagy: a $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ generátorfüggvényből leolvasható az X eloszlása:

k	1	3	5	7	9	11	13	15
$p_k = \mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

   amiből szintén könnyen $\mathbb{E}X = \frac{1+3+5+7+9+11+13+15}{8} = 8$.

   c.) $\mathbb{P}(X=10) = p_{10}$ a z^{10} együtthatója a $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ sorfejtésben, vagyis esetünkben nulla.

5. Móricka az egyetemi órák látogatásának egészségügyi kockázatairól ír egy kamu láncle-velet, és elküldi 10 ismerősének a nulladik napon. A levélben benne van, hogy a címzett küldje tovább újabb 10 embernek. A levelet a címzettek egymástól függetlenül 90% valószínűséggel olvasatlanul törlik, ám a maradék 10% valószínűséggel tényleg továbbküldik 10 embernek, a következő napon.

   a.) Várhatóan hányan küldenek levelet a harmadik napon?

   b.) Mennyi a valószínűsége annak, hogy előbb-utóbb senki nem küldi tovább a levelet?

   c.) Mennyi a levelet továbbküldő emberek számának várható értéke?

   Megoldás: Legyen Z_n az n-edik napon levelet küldő emberek száma. *(Vagyis nem az az érdekes, hogy hány levelet küld – aki küld, az úgyis pont* 10*-et küld, – hanem, hogy hány embert fertőz meg a lánclevél-küldés.)* Ez a Z_n Galton-Watson elágazó folyamat. Mindenki $n = 10$ embert próbál megfertőzni, és minden próbálkozás $p = \frac{1}{10}$ valószínűséggel sikeres, így a közvetlen utódok számának várható értéke $m = 1$.

   (Konkrétan az egylépéses utódszámeloszlás $X \sim Bin(n, p) = Bin(10, \frac{1}{10})$, de ez most nekünk csak annyiban kell, hogy $m = np = 1$.)

   Ezért

   a.) $\mathbb{E}Z_3 = m^3 = 1$.

   b.) $m = 1$, vagyis a folyamat kritikus (és nem elfajult). Ezért a kihalás valószínűsége 1.

   c.) A folyamat kritikus, ezért a teljes létszám várható értéke $\mathbb{E}N = \infty$.