Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika
2. ZH

2016 ősz, 2016.11.29 18:00

Munkaidő: 90 perc. A nulladik feladat 0 pontos, a többi mind 9 pontot ér.

0. Írja rá a ZH-ra a *gyakorlatvezető nevét* és a *gyakorlat napját* (meg persze a saját nevét és Neptun-kódját is). Lehetséges helyes megoldások:

   - Kói Tamás, kedd (H607, korábban T603)
   - Kói Tamás, péntek (V1103)
   - Morvai Gusztáv, kedd (R505)
   - Morvai Gusztáv, péntek (E401)

1. Egy béka a számegyenesen ugrál. A nullából indul, majd minden másodpercben urgik egyet: $\frac{1}{3}$ valószínűséggel helyben, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel egy egységnyit jobbra, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel pedig egy egységnyit balra – az előzményektől függetlenül. Móricka a centrális határeloszlás tétel segítségével próbálja megbecsülni annak valószínűségét, hogy a béka 150 ugrás után legalább 10 egységnyivel jutott jobbra. Legfeljebb mennyi lesz Móricka becslésének hibája a Berry-Esseen tétel szerint? *(A tételben szereplő konstanst vehetjük 0.4748-nak.)*

2. Egy 45 pontos ZH-n a hallgatók hosszú évek tapasztalata szerint átlagosan 29 pontot szoktak elérni. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy idén a 130 hallgató átlaga legfeljebb 20 pont lesz. *(Tegyük fel, hogy a feladatsor ugyanolyan nehéz, mint máskor, és a hallgatók is ugyanolyan felkészültek, mint máskor. Az egyes hallgatók eredményei függetlenek. Negatív pontszámot nem lehet elérni.)*

3. Egy véletlen algoritmus egy eldöntendő kérdésre $p = 0.55$ valószínűséggel ad helyes választ. Lefuttatjuk az algoritmust $n = 10000$-szer egymástól függetlenül, és megnézzük, hogy melyik válasz jön ki többször. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a végeredmény rossz – vagyis hogy a hibás válasz jön ki többször, vagy az eredmény döntetlen.

   Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = -x \ln \frac{p}{x} - (1-x) \ln \frac{1-p}{1-x}.$$

4. Legyen X_n diszkrét idejű Markov lánc az $S = \{1, 2, 3\}$ állapottéren a

   $$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   átmenetmátrix-szal. Legyen $X_0 = 1$.

   a.) (2 pont) Mennyi a folyamat kezdetén az 1213233 állapot-sorozat megfigyelésének valószínűsége?

   b.) (2 pont) Menyi a $\mathbb{P}(X_4 = 2)$ valószínűség?

   c.) (3 pont) Körülbelül mennyi a $\mathbb{P}(X_{100} = 1)$ valószínűség? Miért?

   d.) (2 pont) Hosszú távon mennyi lesz $Y_n := (X_n)^2$ időátlaga? Miért?

5. Pistike teendőlistájára (munkaidőben) a feladatok Poisson-folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan 1. Minél több a feladat a listán, Pistike annál kedvetlenebbül dolgozik: ha csak 1 feladata van, azt átlagosan 20 perc alatt elvégzi, ám ha k feladat van a listáján, akkor átlag $20 \cdot k$ percre van szüksége ahhoz, hogy egyetlen-egyet elvégezzen közülük. Ha a feladatok száma 7, akkor az esetleges további beérkező feladatokat figyelmen kívül hagyja.

   Legyen $X(t)$ a listán szereplő feladatok száma t idő elteltével. *Az időt mérjük órákban.* Modellezzük $X(t)$-t folytonos idejű Markov lánccal.

   a.) (2 pont) Adjuk meg a Markov lánc állapotterét és gráf-reperezentációját!

   b.) (2 pont) Írjuk fel az infinitezimális generátort!

   c.) (3 pont) Kezdetben Pistike teendőlistája üres. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 168 munkaóra után ismét üres a lista? Miért?

   d.) (2 pont) Hosszú távon az idő hány százalékában lesz a lista hossza 7? Miért?

   (Segítség: szabad észrevenni, hogy $X(t)$ születési-halálozási folyamat.)