Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika
2. ZH megoldások

2016 ősz, 2016.11.29 18:00

Munkaidő: 90 perc. A nulladik feladat 0 pontos, a többi mind 9 pontot ér.

0. Írja rá a ZH-ra a *gyakorlatvezető nevét* és a *gyakorlat napját* (meg persze a saját nevét és Neptun-kódját is). Lehetséges helyes megoldások:

   - Kói Tamás, kedd (H607, korábban T603)
   - Kói Tamás, péntek (V1103)
   - Morvai Gusztáv, kedd (R505)
   - Morvai Gusztáv, péntek (E401)

1. Egy béka a számegyenesen ugrál. A nullából indul, majd minden másodpercben urgik egyet: $\frac{1}{3}$ valószínűséggel helyben, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel egy egységnyit jobbra, $\frac{1}{3}$ valószínűséggel pedig egy egységnyit balra – az előzményektől függetlenül. Móricka a centrális határeloszlás tétel segítségével próbálja megbecsülni annak valószínűségét, hogy a béka 150 ugrás után legalább 10 egységnyivel jutott jobbra. Legfeljebb mennyi lesz Móricka becslésének hibája a Berry-Esseen tétel szerint? *(A tételben szereplő konstanst vehetjük 0.4748-nak.)*

   Megoldás: Legyen X_i a béka i-edik ugrása. A szöveg szerint az X_i-k függetlenek és egyenletesek a $\{-1, 0-1\}$ halmazon. Legyen $n = 150$ és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ a béka helye 150 ugrás után. Móricka a $\mathbb{P}(S_n \geq 10)$ valószínűséget akarja CHT-vel becsülni. A Berry-Esseen tétel szerint a becslés hibájára

   $$\text{hiba} \leq \frac{C\delta}{\sqrt{n}\sigma^3},$$

   ahol $C = 0.4748$, σ az X_i-k (közös) szórása és $\delta = \mathbb{E}(|X_i - m|^3)$, ahol $m = \mathbb{E}X_i$. Esetünkben

   $$\begin{aligned} m &= \frac{-1+0+1}{3} = 0 \\ \sigma^2 &= \mathbb{E}X_i^2 - m^2 = \mathbb{E}X_i^2 = \frac{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}{3} = \frac{2}{3} \\ \delta &= \mathbb{E}(|X_i - m|^3) = \mathbb{E}(|X_i|^3) = \frac{|-1|^3 + |0|^3 + |1|^3}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

   Ezeket visszhelyettesítve

   $$\text{hiba} \leq \frac{0.4748 \cdot \frac{2}{3}}{\sqrt{150}\sqrt{\frac{2}{3}}^3} = \frac{0.4748}{\sqrt{100}} = 0.04748 \approx 4.7\%.$$

2. Egy 45 pontos ZH-n a hallgatók hosszú évek tapasztalata szerint átlagosan 29 pontot szoktak elérni. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy idén a 130 hallgató átlaga legfeljebb 20 pont lesz. *(Tegyük fel, hogy a feladatsor ugyanolyan nehéz, mint máskor, és a hallgatók is ugyanolyan felkészültek, mint máskor. Az egyes hallgatók eredményei függetlenek. Negatív pontszámot nem lehet elérni.)*

   Megoldás: Legyen $n = 130$ és legyen $i = 1, 2, \ldots, n$-re X_i az i-edik hallgató pontszáma. Így $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ az évfolyam összpontszáma. Feladat a $\mathbb{P}(\frac{S_n}{n} \leq 20) = \mathbb{P}(S_n \leq 2600)$ valószínűség becslése.

A feladat szerint az X_i-k függetlenek és korlátosak: $0 = a_i \le X_i \le b_i = 45$. Egyébként az eloszlásukról semmit nem tudunk – nincs okunk pl. feltételezni, hogy azonos eloszlásúak lennének. Így a Cramér féle nagy eltérés tétel nem használható.

Szerencsére tudjuk viszont az *összeg* várható értékét. Pontosabban, a szöveg szerint $\mathbb{E}\frac{S_n}{n} = 29$, amiből $\mathbb{E}S_n = 29n = 3770$. A Hoeffding egyenlőtlenség alkalmazásához ez éppen elég: Hoeffding szerint $t \ge 0$-ra

$$\mathbb{P}(S_n \le \mathbb{E}S_n - t) \le \exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right\}.$$

Esetünkben $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 = 130(45-0)^2 = 263250$, így $t := 3770 - 2600 = 1170$ választással

$$\mathbb{P}(S_n \le 2600) = \mathbb{P}(S_n \le \mathbb{E}S_n - t) \le \exp\left\{-\frac{2 \cdot 1170^2}{263250}\right\} = e^{-10.4} \approx 3 \cdot 10^{-5}.$$

3. Egy véletlen algoritmus egy eldöntendő kérdésre $p = 0.55$ valószínűséggel ad helyes választ. Lefuttatjuk az algoritmust $n = 10000$-szer egymástól függetlenül, és megnézzük, hogy melyik válasz jön ki többször. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy a végeredmény rossz – vagyis hogy a hibás válasz jön ki többször, vagy az eredmény döntetlen.

   Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = -x \ln\frac{p}{x} - (1-x)\ln\frac{1-p}{1-x}.$$

1. Megoldás: *Hoeffding egyenlőtlenséggel.* Legyen $i = 1, 2, \ldots, n$-re $X_i = 1$, ha az i-edik válasz helyes, és $X_i = 0$, ha hibás. Legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ a helyes válaszok száma. Kérdés a

$$\mathbb{P}\left(S_n \le \frac{n}{2}\right) = \mathbb{P}(S_n \le 5000)$$

valószínűség. Az X_i-k függetlenek és Bernoulli eloszlásúak $p = 0.55$ paraméterrel, vagyis $m := \mathbb{E}X_i = p = 0.55$.

Az X_i-k korlátosak $0 = a_i \le X_i \le b_i = 1$ korlátokkal. A Hoeffding egyenlőtlenséghez kelleni fog, hogy

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 = n(1-0)^2 = n = 10000.$$

$\mathbb{E}S_n = nm = 5500$, így $t = 500$ választással a Hoeffding egyenlőtlenség szerint

$$\mathbb{P}(S_n \le 5000) = \mathbb{P}(S_n \le \mathbb{E}S_n - t) \le \exp\left\{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right\} = e^{-50} \approx 1.93 \cdot 10^{-22}.$$

2. Megoldás: *Cramér tétellel.* Legyen $i = 1, 2, \ldots, n$-re $X_i = 1$, ha az i-edik válasz helyes, és $X_i = 0$, ha hibás. Legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ a helyes válaszok száma. Kérdés a

$$\mathbb{P}\left(S_n \le \frac{n}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \le \frac{1}{2}\right)$$

valószínűség. Az X_i-k függetlenek és Bernoulli eloszlásúak $p = 0.55$ paraméterrel, vagyis $m := \mathbb{E}X_i = p = 0.55$.

A kérdés $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \le \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a, b]\right)$, ahol $a = -\infty$ és $b = \frac{1}{2}$. mivel $b = \frac{1}{2} < 0.55 = m$, a Cramér tétel szerint

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \le \frac{1}{2}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in (a, b]\right) \lessapprox e^{-nI(b)} = e^{-10000 I(\frac{1}{2})},$$

ahol I a $p = 0.55$ paraméterű Bernoulli eloszlás rátafüggvénye, vagyis $q = 1 - p$ jelöléssel

$$I\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ln\frac{p}{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{1}{2}\right)\ln\frac{q}{1 - \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ln(4pq).$$

esetünkben $I(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}\ln(0.99) \approx 0.005025$, így

$$\mathbb{P}(S_n \le 5000) \lessapprox e^{-10000 \cdot 0.05025} = e^{-50.25} \approx 1.50 \cdot 10^{-22}.$$

4. Legyen X_n diszkrét idejű Markov lánc az $S = \{1, 2, 3\}$ állapottéren a

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

átmenetmátrix-szal. Legyen $X_0 = 1$.

a.) (2 pont) Mennyi a folyamat kezdetén az 1213233 állapot-sorozat megfigyelésének valószínűsége?

b.) (2 pont) Menyi a $\mathbb{P}(X_4 = 2)$ valószínűség?

c.) (3 pont) Körülbelül mennyi a $\mathbb{P}(X_{100} = 1)$ valószínűség? Miért?

d.) (2 pont) Hosszú távon mennyi lesz $Y_n := (X_n)^2$ időátlaga? Miért?

Megoldás:

a.) Mivel $X_0 = 1$, a kezdőállapot stimmel, így

$$\mathbb{P}(1213233) = P_{12}P_{21}P_{13}P_{32}P_{23}P_{33} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

(Hát persze: 3-ból 3-ba nem lehet ugrani.)

b.) Mivel $X_0 = 1$,

$$\mathbb{P}(X_4 = 2) = \mathbb{P}(X_4 = 2 | X_0 = 1) = P^{(}4)_{12} = \left(P^4\right)_{12},$$

vagyis a P^4 mátrix 1. sorának 2. eleme. Ehhez először P^2-et számolom ki, aztán $P^4 = (P^2)^2$-t, de csak azokat az elemeket, amik tényleg kellenek:

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{8}{18} & \frac{5}{18} \\ * & \frac{12}{18} & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix}$$

$$P^4 = \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{8}{18} & \frac{5}{18} \\ * & \frac{12}{18} & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{8}{18} & \frac{5}{18} \\ * & \frac{12}{18} & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & \frac{136}{324} & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Vagyis $\mathbb{P}(X_4 = 2) = \frac{136}{324} = \frac{34}{81} \approx 0.4198$.

c.) $n = 100$ hosszú idő, a Markov láncunk pedig véges állapotterű, irreducibilis és aperiodikus. Így a Markov láncok alaptétele szerint $\mathbb{P}(X_{100} = 1) \approx \pi_1$, ahol π az egyetlen stacionárius eloszlás, vagyis a $(P^T - I)\pi^T = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer (egyetlen normált) megoldása, ahol I az egységmátrix. Esetünkben

$$P^T - I = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

A lineáris egyenletrendszert a szokásos bővített mátrix jelöléssel írom, és eliminációval oldom meg. Első lépésben felszorzom az egyenleteket, aztán felcserélek két sort, hogy ne legyen annyi tört. Utána kezdem a tényleges eliminációt.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & 12 & 0 \\ 0 & 9 & -12 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{4}{3} & 0 \end{array}\right)$$

Az egyenleteket kiolvasva $\pi_1 = \pi_3$ és $\pi_2 = \frac{4}{3}\pi_3$, amiből $\pi_3 = 3$ választással kijön, hogy egy megoldás a $\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Ezt lenormálva kapjuk az egyetlen stacionárius eloszlást:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Ebből a kérdésre a válasz

$$\mathbb{P}(X_{100} = 1) \approx \pi_1 = \frac{3}{10}.$$

d.) Legyen az $f_S \to IR$ függvény $f(x) = x^2$, ami ezen a véges álapottáren nem más mint az

$$f = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

oszlopvektor. Mivel a Markov lánc véges állapotterű és irreducibilis, az ergodtétel szerint $Y_n := (X_n)^2 = f(X_n)$ időátlagának határértéke 1 valószínűséggel

$$\mathbb{E}_\pi f = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi f = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{4}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{3}{10} \cdot 1 + \frac{4}{10} \cdot 4 + \frac{3}{10} \cdot 9 = 4.6.$$

5. Pistike teendőlistájára (munkaidőben) a feladatok Poisson-folyamat szerint érkeznek, óránként átlagosan 1. Minél több a feladat a listán, Pistike annál kedvetlenebbül dolgozik: ha csak 1 feladata van, azt átlagosan 20 perc alatt elvégzi, ám ha k feladat van a listáján, akkor átlag $20 \cdot k$ percre van szüksége ahhoz, hogy egyetlen-egyet elvégezzen közülük. Ha a feladatok száma 7, akkor az esetleges további beérkező feladatokat figyelmen kívül hagyja.

   Legyen $X(t)$ a listán szereplő feladatok száma t idő elteltével. *Az időt mérjük órákban.* Modellezzük $X(t)$-t folytonos idejű Markov lánccal.

   a.) (2 pont) Adjuk meg a Markov lánc állapotterét és gráf-reperezentációját!

   b.) (2 pont) Írjuk fel az infinitezimális generátort!

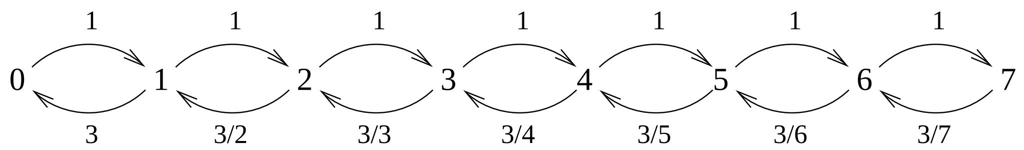
c.) (3 pont) Kezdetben Pistike teendőlistája üres. Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy 168 munkaóra után ismét üres a lista? Miért?

d.) (2 pont) Hosszú távon az idő hány százalékában lesz a lista hossza 7? Miért?

(Segítség: szabad észrevenni, hogy $X(t)$ születési-halálozási folyamat.)

Megoldás:

a.) Az állapottér $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Mivel a feladatok Poisson folyamat szerint érkeznek, felfelé ugrani csak egysével lehet. Mivel Pistike egyszerre csak egy faladattal tud végezni, lefelé ugrani is csak egyesével lehet. Így $X(t)$ valóban születési-halálozási folyamat. A felfelé ugrás rátája az érkező feladatok Poisson-folyamatának rátája, vagyis mindig 1 – kivéve, ha már a 7-ben vagyunk. A lefelé urgás rátája az 1-ből $\lambda_{10} = \frac{1 \text{ óra}}{20 \text{ perc}} = 3$. Mivel a k állapotban Pistike k-szor lassabban dolgozik, a többi lefelé ugrási ráta ennek megfelelően kisebb: $\lambda_{k,k-1} = \frac{3}{k}$ ($k = 2, 3, 4, 5, 6, 7$-re). Így a gráf-reprezentáció



b.) A generátor főátlón kívüli elemeibe az ugrási ráták kerülnek, a főátlót pedig úgy töltjük ki, hogy minden sorösszeg 0 legyen. Az elemek nagy része persze nulla, mert csak szomszédos állapotokba lehet ugrani:

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -5/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/3 & -6/3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/4 & -7/4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/5 & -8/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/6 & -9/6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/7 & -3/7 \end{pmatrix}$$

c.) $t = 168$ (óra) hosszú idő, a Markov láncunk pedig véges állapotterű és irreducibilis. (A periodicitás nem merül fel, mert az idő folytonos). Így a Markov láncok alaptétele szerint a kiinduló állapottól függetlenül $\mathbb{P}(X(168) = 0) \approx \pi_0$, ahol π az egyetlen stacionárius eloszlás. π elég könnyen megkapható a $G^T \pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer megoldásával is, de én inkább kihasználom, hogy $X(t)$ születési-halálozási folyamat. Emiatt ugyanis $k = 0, 1, \ldots, 6$-ra $\pi_k \lambda_{k,k+1} = \pi_{k+1} \lambda_{k+1,k}$ – ami annak felel meg, hogy hosszú távon ugyanannyi ugrásnak kell történni k-ból $k+1$-be, mint vissza. Esetünkben

$$
\begin{aligned}
\pi_0 \cdot 1 &= \pi_1 \cdot 3 \\
\pi_1 \cdot 1 &= \pi_2 \cdot \frac{3}{2} \\
\pi_2 \cdot 1 &= \pi_3 \cdot \frac{3}{3} \\
\pi_3 \cdot 1 &= \pi_4 \cdot \frac{3}{4} \\
\pi_4 \cdot 1 &= \pi_5 \cdot \frac{3}{5} \\
\pi_5 \cdot 1 &= \pi_6 \cdot \frac{3}{6} \\
\pi_6 \cdot 1 &= \pi_7 \cdot \frac{3}{7}.
\end{aligned}
$$

Első körben keresek egy akármilyen (egyelőre nem normált) megoldást. Például $\tilde{\pi}_7 := 560$ választással az jön ki, hogy

$$
\begin{aligned}
\tilde{\pi}_6 &= \frac{3}{7}\tilde{\pi}_7 = \frac{3}{7} \cdot 560 = 240 \\
\tilde{\pi}_5 &= \frac{3}{6}\tilde{\pi}_6 = \frac{3}{6} \cdot 240 = 120 \\
\tilde{\pi}_4 &= \frac{3}{5}\tilde{\pi}_5 = \frac{3}{5} \cdot 120 = 72 \\
\tilde{\pi}_3 &= \frac{3}{4}\tilde{\pi}_4 = \frac{3}{4} \cdot 72 = 54 \\
\tilde{\pi}_2 &= \frac{3}{3}\tilde{\pi}_3 = \frac{3}{3} \cdot 54 = 54 \\
\tilde{\pi}_1 &= \frac{3}{2}\tilde{\pi}_2 = \frac{3}{2} \cdot 54 = 81 \\
\tilde{\pi}_0 &= 3\tilde{\pi}_1 = 3 \cdot 81 = 243
\end{aligned}
$$

Vagyis egy megoldás a $\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} 243 & 81 & 54 & 54 & 72 & 120 & 240 & 560 \end{pmatrix}$ sorvektor. Az egyetlen stacionárius eloszlás ennek lenormáltja: mivel $\tilde{\pi}$ elemeinek összege 1424,

$$
\pi = \frac{1}{1424}\tilde{\pi} = \begin{pmatrix} \frac{243}{1424} & \frac{81}{1424} & \frac{54}{1424} & \frac{54}{1424} & \frac{72}{1424} & \frac{120}{1424} & \frac{240}{1424} & \frac{560}{1424} \end{pmatrix}.
$$

Így a kérdésre a válasz

$$
\mathbb{P}(X(168) = 0) \approx \pi_0 = \frac{243}{1424} \approx 0.1706.
$$

d.) Legyen $f : S \to \mathbb{R}$ a 7-es állapot indikátora, vagyis $f(i) = 1$ ha $i = 7$, és $f(i) = 0$, ha $i \neq 7$. A kérdés így az $f(X(t))$ véletlen függvény időátlaga. Mivel a Markov láncunk véges állapotterű és irreducibilis, az ergodtétel szerint hosszú távon az időátlag

$$
\mathbb{E}_\pi f = \sum_{i \in S} \pi_i f(i) = \pi_7 = \frac{560}{1424} \approx 0.3933.
$$

Vagyis hosszú távon körülbelül az idő 39%-ában lesz tele a teendőlista.