Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika 1. ZH pótlása

2015. december 14. 10:00

Munkaidő: 50 perc. Minden feladat 15 pontot ér.

1. Egy szelet mazsolás-diós kalácsban átlagosan 10 gyümölcsdarab van, ebből 3 diódarab (a többi mazsola). Móricka és Pistike is vett egy-egy ilyen kalácsot.

   a.) Körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy Móricka pont 10 gyümölcsdarabot talál benne?

   b.) Móricka eldicsekedett Pistikének, hogy ő a kalácsában pont 10 gyümölcsdarabot talált, és mind mazsola volt. Ezek után körülbelül mennyi a valószínűsége, hogy a Pistike kalácsa is ugyanilyen?

2. Egy bank pénztáránál minden ügyfél kiszolgálása pontosan 1 percig tart. Ez alatt az 1 perc alatt az újonnan érkező, és a sorba beálló ügyfelek száma 0, 1 vagy 2 lehet, $\frac{1}{3}$-$\frac{1}{3}$ valószínűséggel, az előzményektől függetlenül. Közvetlenül a 0 időpont előtt a sor üres, de 0-kor megérkezik az első ügyfél, Móricka.

   (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a sor még valaha egyszer újra üres lesz?

   (b) Mennyi a kiszolgált ügyfelek számának várható értéke, mielőtt a sor újra üres lesz?

   (Tipp: Amíg Mórickát kiszolgálják, véletlen számú új ügyfél érkezik. Nevezzük őket „első generáció”-nak.)

3. Móricka elhatározza, hogy addig dobál egy dobókockát, amíg 1000-szer ki nem jön neki a hatos. (Persze nem feltétlenül kell az 1000 hatosnak egymás után kijönni.) Adjunk nagy eltérés becslést annak a valószínűségére, hogy ez legfeljebb 5000 dobásból sikerül neki.

   (Segítség: a p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right)$$

   (ha $0 < x < 1$). A p paraméterű (optimista) geometriai eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

   $$I(x) = x \ln\left(\frac{x-1}{x}\frac{1}{1-p}\right) + \ln\left(\frac{1}{p}\frac{1-p}{x-1}\right)$$

   (ha $x > 1$).)