1 a) A kalácsban a gyümölcsdarabok Poisson-folyamat szerint helyezkednek el, a folyamat rátája 10 gyümölcsdarab/szelet.

$\Rightarrow$ egy szeletbe eső darabok száma $X \sim Poi(10)$,

$$P(X=10) = \frac{10^{10}}{10!}e^{-10} \approx 0{,}125$$

b) Móricka és Pistike kalácsába eső gyümölcsdarabok száma független, ezért a kérdés valójában P(Pistike kalácsában 10 mazsola és 0 dió van). A kalácsban a dió és mazsola darabok száma független (ritkított Poisson-folyamat), a ráták 7 mazsola / szelet és 3 dió / szelet, így

$$P(10 \text{ mazsola és } 0 \text{ dió}) = P(10 \text{ mazsola}) \cdot P(0 \text{ dió}) =$$

$$= \frac{7^{10}}{10!}e^{-7} \cdot \frac{3^0}{0!}e^{-3} \approx 0{,}00353$$

2 Alkalmazzunk elágazó folyamatot; az ügyfelek az egyedek, egy ügyfél közvetlen utódai azok, akik az ő kiszolgálása alatt álltak be a sorba.

Az utódeloszlás generátorfüggvénye $G(z) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}z^2$, várható értéke $G'(1) = 1$, ezért a folyamat kritikus, és így

a) P(kihalás) = P(üres lesz a sor) = 1

b) E(N) = E(összes ügyfél a kihalás előtt) = ∞

③ 1. megoldás:

Hoeffdinggel: P(5000 dobásból legyen ≥1000 hatos) =

$= P(S_n \geq 1000)$, ahol S_n a hatosok száma 5000 dobásból.

$S_n = X_1 + \ldots + X_n \qquad n = 5000$

$X_i = \begin{cases} 0 & i.\text{ dobás nem hatos} \\ 1 & i.\text{ dobás hatos} \end{cases} \qquad X_i$-k függetlenek.

$EX_i = \frac{1}{6} \quad ES_n = \frac{5000}{6}$

Hoeffding: $P(S_n \geq ES_n + t) \leq e^{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}}$

$a_i \leq X_i \leq b_i \rightsquigarrow a_i = 0 \quad b_i = 1$

$ES_n + t = 1000 \rightsquigarrow t = 1000 - \frac{5000}{6} = \frac{1000}{6} \approx 166{,}7$

$P(S_n \geq 1000) \leq e^{-\frac{2 \cdot 166{,}7^2}{5000}} \approx 1{,}49 \cdot 10^{-5}$

3 2. és 3. Megoldás: 2015 ősz 2015.12.14

Cramér-tétellel két megközelítés:

a.) S_n = hatosok száma 5000 dobásból.

$n = 5000$ $\quad S_n = X_1 + \dots + X_n$

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i. \text{ dobás hatos} \\ 0 & \text{ha az } i. \text{ dobás nem hatos} \end{cases}$ $\quad X_i$-k függetlenek

$X_i \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{6}\right)$ $\quad EX_i = \frac{1}{6}$ $\quad I(x) = x\ln\left(\frac{5x}{1-x}\right) + \ln\left(\frac{6}{5}(1-x)\right)$

$$P(S_n \geq 1000) = P\left(\frac{S_n}{n} \geq \frac{1000}{5000}\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \in \left[\frac{1}{5}, 1\right]\right) \leq$$

$$\leq e^{-n \inf\limits_{x \in [\frac{1}{5}, 1]} I(x)} = e^{-n I(\frac{1}{5})} \approx 5{,}42 \cdot 10^{-9}$$

$\boxed{\text{VAGY}}$ a másik megközelítés:

b.) S_n = 1000-edik hatosig szükséges dobások száma.

$S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ $\quad n = 1000$

Y_i = az $(i-1)$-edik hatostól az i-edik hatosig szükséges dobások száma

Y_i-k ftlenek, $Y_i \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{6}\right)$ $\quad E(Y_i) = 6$

$$I(x) = x\ln\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{x-1}{x}\right) + \ln\left(\frac{5}{x-1}\right)$$

$$P(S_n \leq 5000) = P\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{5000}{1000}\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \in [0,5]\right) \leq$$

$$\leq e^{-n \inf\limits_{x \in [0,5]} I(x)} = e^{-n I(5)} = e^{-1000 I(5)} \approx$$

$$\approx 5{,}42 \cdot 10^{-9}$$