(1) 1. megoldás:

Hoeffdinggel: P(5000 dobásból kijön ≥1000 hatos) =

$= P(S_n \geq 1000)$, ahol S_n a hatosok száma 5000 dobásból.

$S_n = X_1 + \dots + X_n \qquad n = 5000$

$X_i = \begin{cases} 0 & i.\text{ dobás nem hatos} \\ 1 & i.\text{ dobás hatos} \end{cases}$ $\qquad X_i$-k függetlenek.

$EX_i = \frac{1}{6} \qquad ES_n = \frac{5000}{6}$

Hoeffding: $P(S_n \geq ES_n + t) \leq e^{-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i)^2}}$

$a_i \leq X_i \leq b_i \rightsquigarrow a_i = 0 \quad b_i = 1$

$ES_n + t = 1000 \rightsquigarrow t = 1000 - \frac{5000}{6} = \frac{1000}{6} \approx 166{,}7$

$P(S_n \geq 1000) \leq e^{-\frac{2 \cdot 166{,}7^2}{5000}} \approx 1{,}49 \cdot 10^{-5}$

1) 2. megoldás & 3. megoldás:

Cramer-tétellel két megközelítés:

a.) S_n = hatosok száma 5000 dobásból.

$n = 5000 \qquad S_n = X_1 + \dots + X_n$

$X_i = \begin{cases} 1 & \text{ha az } i. \text{ dobás hatos} \\ 0 & \text{ha az } i. \text{ dobás nem hatos} \end{cases} \qquad X_i\text{-k függetlenek}$

$X_i \sim \text{Bernoulli}\left(\frac{1}{6}\right) \qquad EX_i = \frac{1}{6} \qquad I(x) = x \ln\left(\frac{5x}{1-x}\right) + \ln\left(\frac{6}{5}(1-x)\right)$

$$P(S_n \geq 1000) = P\left(\frac{S_n}{n} \geq \frac{1000}{5000}\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \in \left[\frac{1}{5}, 1\right]\right) \leq$$

$$\leq e^{-n \inf\limits_{x \in [\frac{1}{5}, 1]} I(x)} = e^{-n I(\frac{1}{5})} \approx 5{,}42 \cdot 10^{-9}$$

$\boxed{\text{VAGY}}$ a másik megközelítés:

b.) S_n = 1000-edik hatosig szükséges dobások száma.

$S_n = Y_1 + \dots + Y_n \qquad n = 1000$

Y_i = az $(i-1)$-edik hatostól az i-edik hatosig szükséges dobások száma

Y_i-k ftlenek, $Y_i \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{6}\right) \qquad E(Y_i) = 6$

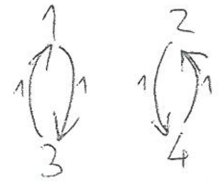
$I(x) = x \ln\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{x-1}{x}\right) + \ln\left(\frac{5}{x-1}\right)$

$$P(S_n \leq 5000) = P\left(\frac{S_n}{n} \leq \frac{5000}{1000}\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \in [0, 5]\right) \leq$$

$$\leq e^{-n \inf\limits_{x \in [0,5]} I(x)} = e^{-n I(5)} = e^{-1000 I(5)} \approx$$

$$\approx 5{,}42 \cdot 10^{-9}$$

(2) A Markov-lánc reducibilis:



Az 1 állapotból indulva a 4 állapot nem elérhető, így $P(X(1000)=4 \mid X(0)=1)=0$.

(3) Egymintás, egyoldali t-próba (a szórás ismeretlen).

$H_0: m=1000$

$H_1: m<1000$

A mintaátlag: $\bar{x} = \frac{1005+1004+1002+998+1004+999}{6} = 1002$

Mivel $\bar{x} \geq m$, ezért H_0 és H_1 közül automatikusan H_0-t fogadjuk el, azaz a gyártó állítását igaznak tekintjük.