Felsőbb Matematika Villamosmérnököknek - Sztochasztika 1. ZH pótpótlása

2015. december 18. 10:00

Munkaidő: 50 perc. Minden feladat 15 pontot ér.

1. Egy irodába a telefonhívások Poisson folyamat szerint futnak be, átlagosan ötpercenként. A két ügyintéző, Móricka és Pistike minden hívásnál érmedobással dönt, hogy melyikük vegye fel a telefont.

   a.) Mennyi a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:20 között nem érkezik hívás?

   b.) Mennyi a valószínűsége, hogy 10:00 és 10:20 között Mórickának egyszer sem kell felvenni a telefont, de Pistikének legalább háromszor?

2. Egy Z_n Galton-Watson elágazó folyamatban $Z_0 = 1$, az egylépéses utódszámeloszlás pedig geometriai $p = \frac{1}{3}$ paraméterrel, vagyis

$$\mathbb{P}(k \text{ utód}) = q^{k-1}p \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

   (ahol $p = \frac{1}{3}$ és $q = 1 - p = \frac{2}{3}$).

   a.) Mennyi a $\mathbb{P}(Z_3 = 0)$ valószínűség?

   b.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a folyamat előbb-utóbb kihal?

3. Egy ZH-n legfeljebb 50 pontot lehet elérni (és legalább nullát). A ZH-t 100 felkészült és 50 készületlen hallgató írja meg. Mindegyikük eredménye véletlen és egymástól független, de a felkészültek esetén a várható érték 40 pont, míg a készületleneknél csak 19 pont. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy az átlagpontszám 28 alatt marad.

   (A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln\left(\frac{x}{1-x}\frac{1-p}{p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right)$$

   (ha $0 < x < 1$). A p paraméterű (optimista) geometriai eloszlás Cramér féle rátafüggvénye

$$I(x) = x \ln\left(\frac{x-1}{x}\frac{1}{1-p}\right) + \ln\left(\frac{1}{p}\frac{1-p}{x-1}\right)$$

   (ha $x > 1$).)