(1) Ha az időt percben mérjük, a folyamat rátája $\lambda = \frac{1}{5}$, mert percenként átlag $\frac{1}{5}$ hívás fut be.

a.) Legyen X a 10:00 és 10:20 között (20 perc alatt) befutó hívások száma. $X \sim Poi(20 \cdot \lambda) = Poi(4)$, így $\mathbb{P}(X=0) = e^{-4}\frac{4^0}{0!} = e^{-4} \approx 0.0183$

b.) Legyen Y a 10:00 és 10:20 között Móricka által felvett hívások száma, Z pedig az ugyanezen időben Pistike által felvett hívások száma.
Móricka és Pistike hívásainak folyamata a teljes hívásfolyamat diszjunkt ritkításai, így független Poisson-folyamatok. Tehát Y és Z függetlenek és Poisson eloszlásúak, várható értékük az $EX=4$ várható hívás fele-fele: $\boxed{Y, Z \sim Poi(2), \text{ függetlenek}}$

A függetlenség miatt

$$\boxed{\mathbb{P}(X=0 \text{ és } Y \geq 3)} = \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y\geq 3) =$$

$$= \mathbb{P}(X=0)\left[1-\mathbb{P}(Y=0)-\mathbb{P}(Y=1)-\mathbb{P}(Y=2)\right] =$$

$$= e^{-2}\frac{2^0}{0!}\left[1-e^{-2}\frac{2^0}{0!}-e^{-2}\frac{2^1}{1!}-e^{-2}\frac{2^2}{2!}\right] = e^{-2}\left[1-e^{-2}(1+2+2)\right]$$

$$\boxed{= e^{-2}-5e^{-4} \approx 0.0438}$$

②

Mivel a folyamat során minden egyednek legalább egy ~~utóda~~ gyereke születik, a folyamat nem halhat ki.

a.) $\mathbb{P}(Z_3=0)=0$

b.) $\mathbb{P}(\text{kihalás})=0$.

(3)

Legyen $n=150$, és $i=1,2,\dots,n$-re legyen X_i az i-edik hallgató pontszáma. $S_n := X_1+\dots+X_n$ az összpontszám.

A feladat a $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}<28\right)$ valószínűség becslése.

A Cramér tétel <u>nem használható</u>, mert az X_i-k eloszlását nem ismerjük. Használható viszont a Hoeffding-egyenlőtlenség, mert az X_i-k korlátosak: $0=a_i \le X_i \le b_i = 50$ minden i-re, továbbá $\mathbb{E}S_n = 100\cdot 40+50\cdot 19 = 4950$ ismert. Így a kérdéses valószínűség

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}<28\right) = \mathbb{P}(S_n<4200) = \mathbb{P}(S_n<\mathbb{E}S_n - t) = ?,$$

ahol $t=750$.

[Segédszámolás: $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2 = \sum_{i=1}^{150}(50-0)^2 = 150\cdot 50^2 = 375000$.]

Így a Hoeffding egyenlőtlenség szerint

$$\underline{\underline{\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}<28\right)}} = \mathbb{P}(S_n<\mathbb{E}S_n-t) \;\underline{\underline{\le}}\; \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2\cdot 750^2}{375000}\right)$$

$$= e^{-3} \approx 0.050 = \underline{\underline{5.0\%}}.$$