(1)

Legyen $n=150$, és $i=1,2,\dots,n$-re legyen X_i az i-edik hallgató pontszáma. $S_n := X_1+\dots+X_n$ az összpontszám.

A feladat a $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}<28\right)$ valószínűség becslése.

A Cramér tétel <u>nem használható</u>, mert az X_i-k eloszlását nem ismerjük. Használható viszont a Hoeffding-egyenlőtlenség, mert az X_i-k korlátosak: $0=a_i\le X_i\le b_i=50$ minden i-re, továbbá $\mathbb{E}S_n=100\cdot 40+50\cdot 19=4950$ ismert. Így a kérdéses valószínűség

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}<28\right)=\mathbb{P}(S_n<4200)=\mathbb{P}(S_n<\mathbb{E}S_n-t)\stackrel{!}{=}?,$$

ahol $t=750$.

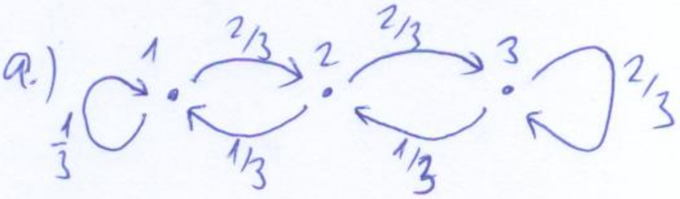
[Segédszámolás: $\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2=\sum_{i=1}^{150}(50-0)^2=150\cdot 50^2=375000$.]

Így a Hoeffding egyenlőtlenség szerint

$$\underline{\underline{\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n}<28\right)}}=\mathbb{P}(S_n<\mathbb{E}S_n-t)\ \underline{\underline{\le}}\ \exp\left(-\frac{2t^2}{\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)^2}\right)=\exp\left(-\frac{2\cdot 750^2}{375000}\right)$$

$$=e^{-3}\approx 0.050=\underline{\underline{5.0\%}}.$$

(2) a.)



b.) $\mathbb{P}(X_1=2; X_2=3; X_3=3; X_4=2; X_5=1 \mid X_0=1) =$

$$= P_{12}\cdot P_{23}\cdot P_{33}\cdot P_{32}\cdot P_{21} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{243} \approx 0.0329$$

c.) A Markov lánc irreducibilis ~~és~~, aperiodikus, ~~ezért~~ és véges állapotterű, ezért a Markov láncok alaptétele szerint $\mathbb{P}(X_n=3 \mid X_0=1) \approx \pi_3$, ha n nagy, ahol π az egyetlen stacionárius ~~megold~~ eloszlás. Márpedig $n=100$ elég hosszú idő. A stacionárius eloszlást megkaphatjuk

- A $(P^T - \mathbb{1})\pi^T = 0$ lineáris egyenletrendszer, vagyis

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array}\right)$$

megoldásával, vagy

- felismerve, hogy X_n születési-halálozási folyamat, ezért $\pi_i P_{i,i+1} = \pi_{i+1} P_{i+1,i}$ $i=1,2$-re.

Mindkét módszerrel az jön ki, hogy $\pi = \text{const.}\cdot(1; 2; 4)$.

Mivel a sorösszegnek 1-nek kell lennie,

$$\boxed{\pi = \left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{4}{7}\right)}$$ és

$$\boxed{\mathbb{P}(X_{100}=3 \mid X_0=1) \approx \pi_3 = \frac{4}{7} \approx 0.571}$$

(3) Legyen az ismeretlen várható érték m.

A nullhipotézis $H0: m \leq \mu$, ahol $\mu = 1000$.

Egymintás, ~~kétoldali~~ egyoldali u-próbát végzünk:

- egymintásat, mert 1 etlen adatsort hasonlítunk egy konstanshoz,
- egyoldalit, mert H0 egyenlőtlenség,
- u-próbát, mert a szórás ismert.

Az átlag $\bar{x} = \dfrac{1005+1004+1002+998+1004+999}{6} = 1002 > \mu$,

így a H0-nak ellentmondó eltérést mértünk: sajnos számolni kell annak eldöntésére, hogy az eltérés 90%-os szinten szignifikáns-e.

Adatok: $n = 6$, $\bar{x} = 1002$, $\sigma = 3$, $\varepsilon = 0.1$, $\mu = 1000$

A teszt-statisztika

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{1002-1000}{3}\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{6} \approx 1.633$$

Az elfogadási küszöb

$$K = u_\varepsilon = \Phi^{-1}(1-\varepsilon) = \Phi^{-1}(0.9) \approx 1.28$$

Döntés: $u > K$, ezért H0-t ELVETJÜK.