Egy val. szám optimalizálási feladat

1/3

Az alábbi optimalizálási feladatnak logisztikai / szállítás-szervezési problémáknál van jelentősége:

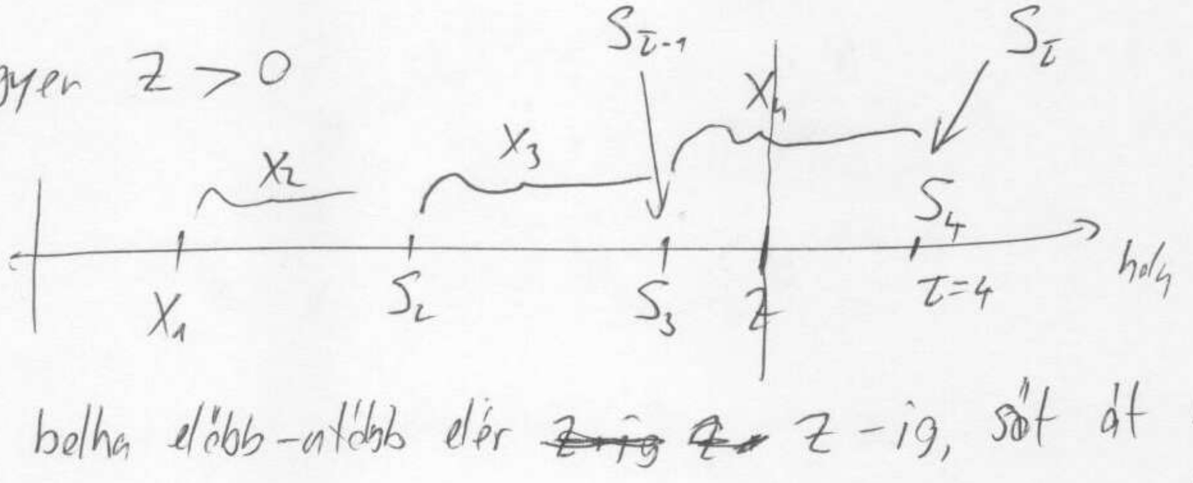
Legyen $X \in [0,1]$ valószínűségi változó, $X \not\equiv 0$.

Legyen $X_1, X_2, X_3 \dots$ i.i.d, X-szel egyező eloszlású.

Legyen X eloszlása μ.

Egy bolha ugrál a számegyenesen 0-ból indulva, mindig jobbra, i.i.d ugrásokkal: a helye n lépés után $S_n := X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

Legyen $z > 0$



A bolha előbb-utóbb elér z-ig, sőt át is ugorja: legyen τ az első olyan pillanat, amikor már elhagyta:

$\tau = \min\{n \mid S_n > z\}$ (persze ez is véletlen).

Előtte még $S_{\tau-1} \leq z$, és

$z - S_{\tau-1}$ -et nevezzük 'veszteség'-nek

[a bolha szeretett volna minél közelebb kerülni Z-hez balról]

Def: $W(z) := \mathbb{E}(z - S_{\tau-1})$ a vesztesés várható értéke

KB Feladat: Keressünk olyan X-et, (vagyis μ-t), amire

$$\sup_{z \geq 0} W(z) \text{ minél kisebb,}$$

de egyúttal $\mathbb{E}X$ minél nagyobb.

Egész pontosan:

$$\text{Legyen } Z = \min\{\mathbb{E}X,\ 1 - \sup_{z \geq 0} W(z)\} = Z(\mu),$$

ez egy, a μ eloszlást jellemző szám.

Pontos feladat: Keressük azt a μ eloszlást $[0,1]$-en, amire $Z(\mu)$ maximális,

illetve keressük $\{Z(\mu) \mid \mu \text{ val.ségi eloszlás } [0,1]\text{-en}\}$ szuprémumát.

Tudnivaló: Viszonylag könnyű megsejteni, hogy mi az optimális μ, és kiszámolni ~~$Z(\mu)$ a maximális~~ $Z(\mu)$-t. Ezt már mások megcsinálták.

Azt, hogy nincs jobb, 3/3

- vagy valami okos ötlettel kellene bizonyítani (nekem nincs okos ötletem)
- vagy numerikusan lehne „ellenőrizni” úgy, hogy megoldjuk az optimalizálási feladatot diszkrét ~~μ-ke~~ μ-re, ami $\{0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}, 1\}$-re van koncentrálva, ahol N jó nagy.

Sejtésem: Ezzel legrosszabb esetben $\frac{1}{N}$ erejéig közelítjük a tényleges optimumot.