Sztochasztika 2 ZH

2014. november 24. 18:00, **A csoport**
Felsőbb matematika tárgy, villamosmérnök és informatikus MSc.
Munkaidő: 45 perc.

1. Egy szabályos dobókockát addig dobálunk, amíg ki nem jön a 6-os, és N-nel jelöljük a 6-ost *megelőző* dobások számát (vagyis a 6-ost már nem számoljuk bele). Ezután feldobunk egy szabályos pénzérmét N-szer, és X-szel jelöljük az összes dobott *fejek* számát. Adjuk meg X várható értékét! *Segítség: X véletlen tagszámú összeg. Bónusz kérdés: mi X eloszlása?*

2. Egy bolha a számegyenesen ugrál. A nullából indul, és minden egész másodpercben ugrik. Az egyes ugrások függetlenek és egyenletes eloszlásúak $\{-1; 1\}$-en. Vagyis a bolha helye n másodperc elteltével $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, ahol $X_1, X_2, \ldots, X_n$ függetlenek és minden X_i értéke $\frac{1}{2}$ valószínűséggel -1, $\frac{1}{2}$ valószínűséggel pedig $+1$.

   Legyen $n = 1000000$ (vagyis a bolha kb. 11 órája és 34 perce ugrál). Ha ekkor a $\mathbb{P}(S_n > 100)$ valószínűséget a centrális határeloszlás tétellel közelítjük, legfeljebb mekkora lehet a közelítés hibája a Berry-Esséen tétel szerint? (A Berry-Esséen tételben szereplő C konstans egy 2010-es eredmény szerint választható $C = 0.4784$-nek.)

3. Egy forgalmas helyen lévő készpénzautomatát egy nap alatt (feltöltéstől feltöltésig) 500 ember használ. A legkisebb felvehető összeg ezer Ft, a legnagyobb százezer Ft. A bank tapasztalata szerint az emberek átlagosan 20-ezer Ft-ot vesznek fel. Az egyes emberek által felvett összegek függetlenek egymástól. Mennyi pénzzel kell az automatát feltölteni, ha 99%-ig biztosak akarunk lenni benne, hogy nem fogy ki a következő feltöltésig? Használjunk nagy eltérés becslést!

Sztochasztika 2 ZH

2014. november 24. 19:00, **B csoport**
Felsőbb matematika tárgy, villamosmérnök és informatikus MSc.
Munkaidő: 45 perc.

1. Egy X valószínűségi változó generátorfüggvénye $g(z) = \frac{2}{4-2^z}$.

   a.) Mennyi X várható értéke?

   b.) Mennyi X szórása?

   c.) Mennyi a $\mathbb{P}(X = 0)$ és a $\mathbb{P}(X = 1)$ valószínűség?

2. Egy egyetemistának egy tantárgy teljesítéséhez egy feladatot kellene megoldania, ám ez csak $\frac{2}{10}$ valószínűséggel sikerül. $\frac{6}{10}$ valószínűséggel ugyanis az oktató nem lesz megelégedve, és egy másik feladatot is felad, $\frac{2}{10}$ valószínűséggel pedig annyira nem lesz megelégedve, hogy *két* új feladatot is ad. Az esetleges újabb feladatokat aztán ismét $\frac{2}{10}$ valószínűséggel tudja a hallgató jól megoldani, $\frac{6}{10}$ valószínűséggel kap helyettük egy újat, $\frac{2}{10}$ valószínűséggel pedig két újat – az előzményektől függetlenül.

   a.) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a hallgató előbb-utóbb teljesíti a tárgyat?

   b.) Mennyi a tárgy teljesítéséig kiadott feladatok számának várható értéke?

3. Egy levelezőszerverre minden egyes precben véletlen számú levél érkezik, percenként átlagosan 1. Az egyes percekben érkező levelek száma független és Poisson eloszlású. Adjunk nagy eltérés becslést annak a valószínűségére, hogy egy nap alatt több mint 1800 levél érkezik.

   Segítség: A μ paraméterű exponenciális eloszlás Cramér féle rátafüggvénye $I_{Exp}(x) = \mu x - 1 - \ln(\mu x)$ (ha $x > 0$). A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye $I_{Poi}(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda$ (ha $x > 0$).