Durva tematika a „Matematika Plus 1” előadások anyagáról, azon belül is a második témakörről (lineáris algebra).

Tóth Imre Péter

Matematika Intézet, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2009 május 12.

Sajnos csak címszavakban tudtam legépelni az elhangzottakat. Remélem, ez is segít valamit.

Az anyag középső (nagy) része megtalálható a Simon Károly írt jegyzetben:
`http://www.math.bme.hu/~simonk/mp1/matplus1_b.pdf`

1. Tematika

- Normált lineáris tér fogalma, L^1, L^2, L^p terek. A normából származó metrika. Lényeg, hogy az $L^p([a,b])$ tér azokból az $[a,b]$-n értelemezett f függvényekből áll, amikre az $\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x$ integrál létezik (és véges). Az ilyen függvények (mint vektorok) p-normáját úgy definiáljuk, hogy

$$||f||_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x}.$$

  Norma egy olyan, vektorhoz számot rendlő függvény, ami a „hosszúság” szokásos tulajdonságaival rendelkezik.

- Annak bizonyítása, hogy az L^2 norma valóban kielégíti a háromszög-egyenlőtlenséget.

- Az A mátrix fundamentális alterei
  - $col(A)$ oszlopvektorok tere
  - $row(A)$ sorvektorok tere
  - mindkettő dimenziója ugyanannyi, vagyis $rank(A)$, a mátrix rangja
  - $null(A)$ a nulltér
  - ennek dimenziója $nullity(A)$
  - persze $row(A^T) = col(A)$ és $col(A^T) = row(A)$

- Vektorrendszerre merőleges altér fogalma

- Dimenzió tétel mátrixokra
- Dimenzió tétel alterekre
- altérre való merőleges vetítés (projekció) fogalma
- altérre való vetítés mátrixa
- túlhatározott lineáris egyenletrendszerek közelítő megoldása legkisebb négyzetes értelemben
- egyenesillesztés legkisebb négyzetes értelemben
- polinomilesztés legkisebb négyzetes értelemben. Ez szóról szóra ugyanúgy megy, mint az egyenesillesztés, csak nem 2, hanem 3 paramáter van, amik aztán a megoldandó lineáris egyenletrendszer ismeretlenjei lesznek.
- A determináns, mint a mátrix oszlopvektorai által meghatározott paralellepipedon térfogata
- Ennek általánosítása: n dimenzióban k vektor által kifeszített k-dimenziós paralellepipedon k-dimenziós „térfogata" mint a $k \times k$-as Gram-mátrix determinánsának négyzetgyöke.

  Ez röviden annyi, hogy ha a k darab n-dimenziós vektort beleírjuk oszloponként egy $n \times k$-as M mátrixba, akkor a kifeszített paralellepipedon (k-dimenziós) térfogata

  $$V = \sqrt{det(M^T M)}.$$

- Maximális rangú mátrix fogalma, sor-reguláris és oszlop-reguláris mátrix fogalma. Egy (nem feltétlenül négyzet alakú) mátrix akkor maximális rangú, ha a rangja megegyezik a sorai vagy az oszlopai számával. (Persze rég tudjuk, hogy több egyiknél se lehet.) Ezen belül, ha a rang a sorok száma – vagyis a sorvektorok lineárisan függetlenek, akkor a mátrix sor-reguláris. Ha a rang az oszlopok száma – vagyis az oszlopvektorok lineárisan függetlenek, akkor a mátrix oszlop-reguláris.

  A sor-reguláris mátrixok vízszintesen nyújtott téglalap alakúak (vagy négyzetesek). Az oszlop-reguláris mátrixok függőlegesen nyújtott téglalap alakúak (vagy négyzetesek).

  Ha M sor-reguláris, akkor MM^T egy reguláris négyzetes mátrix. Ha M oszlop-reguláris, akkor M^TM egy reguláris négyzetes mátrix.

- Sor-reguláris mátrix általánosított inverze az alulhatározott lineáris egyenletrendszer normál-megoldása alapján.

  Ha az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszerben több az ismeretelen, mint az egyenlet, és az M együttható-mátrix sor-reguláris, akkor garantáltan végtelen sok x megoldás(vektor) van. Ezek közül a legrövidebbiket (vagyis amelyikre $|x|$ minimális) nevezzük az egyenletrendszer normál-megoldásásnak, és kiszámolhatjuk úgy, hogy $x = M^T(M\,M^T)^{-1}b$. Ez alapján egy sor-reguláris M mátrix *általámosított inverzét* úgy definiáljuk, hogy $M^+ := M^T(M\,M^T)^{-1}$.

- Oszlop-reguláris mátrix általánosított inverze a túlhatározott lineáris egyenletrendszer pszeudo-megoldása alapján.

  Ha az $Mx = b$ lineáris egyenletrendszerben több az egyenlet, mint az ismeterlen, és az M együttható-mátrix oszlop-reguláris, akkor megoldás általában nincs, de létezik pontosan egy „legjobb közelítő megoldás" (a korábbról ismert legkisebb négyzetes értelemben), amit pszeudo-megoldásnak is nevezünk. Ezt úgy is kiszámolhatjuk, hogy $x = (M^T M)^{-1} M^T b$. Ez alapján egy oszlop-reguláris M mátrix *általámosított inverzét* úgy definiáljuk, hogy $M^+ := (M^T M)^{-1} M^T$.

- tetszőleges mátrix általánosított inverze rang-faktorizációval

  Csak kinyilatkoztattam, hogy tetszőleges (nem azonosan nulla) A mátrix felírható $A = BC$ alakban, ahol A oszlopreguláris, B pedig sor-reguláris (ez az A rang-faktorizációja). Ezek után A általánosított inverzét úgy definiáljuk, hogy $A^+ := C^+ B^+$. Kinyilatkoztattam, hogy B és C megválasztása nem egyértelmű, de A^+ igen.

- Általános lineáris egyenletrendszer normálmegoldása az általánosított inverzzel.

  Egy általános $Ax = b$ lineáris egyenletrendszerél – ahol tehát nem feltétlenül van megoldás, de legkisebb négyzetes értelemben vett megoldásból (pszeudo-megoldásból) végtelen sok is lehet, *normál-megioldásnak* nevezzük a pszeudo-megoldások közül a legrövidebbiket.

  Kinyilatkoztattam, hogy a normál-megoldás kiszámolható úgy, hogy $x = A^+ b$.

2. Elképzelhető ZH-feladatok

(távolról sem teljes lista)

- vektor altérre való merőleges vetítületének kiszámolása
- altérre való vetítés mátrixa
- túlhatározott lineáris egyenletrendszerek közelítő megoldása legkisebb négyzetes értelemben
- egyenesillesztés legkisebb négyzetes értelemben
- polinomilesztés legkisebb négyzetes értelemben.
- Egy vektorrendszer által meghatározott paralellepipedon térfogatának kiszámolása
- Alulhatározott lineáris egyenletrendszer normál-megoldásának megkeresése
- Sor-reguláris mátrix általánosított inverzének kiszámolása
- Túlhatározott lineáris egyenletrendszer pszeudo-megoldásának megkeresése
- Oszlop-reguláris mátrix általánosított inverzének kiszámolása
- stb.