Vázlat a „Matematika Plus 1” előadások anyagáról, feledik változat

Tóth Imre Péter

Matematika Intézet, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2009 március 23.

Bevezetés

Ez e jegyzet meglehetősen egyenetlenre sikeredett, és nincs teljesen szinkronban az előadáson elhangzottakkal. Néha a gyorsaság kedvéért átugrottam fontos lépéseket, amik az előadáson elhangzottak, máskor leírtam olyasmit is, ami az előadásból kimaradt. Azért nagyjából így is áttekintést ad az előadások anyagáról.

Jelen formájában (március 23-án este) a vázlat kb. 3 és fél előadás anyagát fedi. Ami kimaradt (4. ea 2. fele és 5. ea):

- kompakt halmazok definíciója, példák, miért szeretjük őket
- algebra alaptételének bizonyítása
- mi az a teljes metrikus tér és miért szeretjük.

Egyelőre eddig jutottam, bocs.

A félév első felének központi fogalma a **távolság**. Mint látni fogjuk, nagyon sok féle objektum távolságáról van értelme beszélni – szakszerűbben fogalmazva: nagyon sok féle halmazon lehet metrikát definiálni. Lesz szó számok, pontok, vektorok, függvények távolságáról. Fontos közös vonás, hogy – bárminek a távolságáról legyen is szó – a távolság maga mindig **valós szám**. Ezért a tárgyalás során kicsit körbejárjuk a valós szám fogalmát is.

1. Számosság

1. definíció. *Bijektív leképezés*

2. definíció. *X és Y halmaz számossága megyegyzik, ha van közöttük kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, vagyis van olyan $f : X \to Y$ függvény, ami*

- *különböző elemekhez különbözőt rendel, és*
- Y minden *elemét hozzárendeli az X valamelyik eleméhez.*

Szokásos jelölése: $X \sim Y$

Példa:

- véges halmazok, végtelen halmazok
- $\{0,1,2,\dots\} \sim \{1,2,3,\dots\}$
- $\{1,2,3,\dots\} \sim \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$

3. megjegyzés. *Egy halmaz pontosan akkor végtelen, ha van olyan* **valódi** *részhalmaza, amivel megegyezik a számossága. Avagy: pontosan akkor véges, ha nincs ilyen.*

4. definíció. *Egy X halmaz megszámlálhatóan végtelen, ha $X \sim \mathbb{N}$.*

Hogy mikor nevezünk egy halmazt „megszámlálható”-nak, az egy kicsit megszokás kérdése. Van, aki csak a megszámlálhatóan végtelen halmazokra mondja ezt, és van, aki a végesekre is. A következő tétel pl. akkor is igaz, ha a „megszámlálható” fogalmába beleértjük a „véges”-et is.

5. tétel. *Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.*

Bizonyítás. Ugyanúgy, ahogy a $\mathbb{Q}$ megszámlálhatóságát megmutattuk. $\square$

További példák:

- $[0,1] \sim [0,1)$
- $(0,1) \sim \mathbb{R}$

6. megjegyzés. $[0,1] \sim \{$*tizedes törtek*$\}$. *A „$0.a_1a_2a_3\dots$” tizedestört jelentése* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i 10^{-i}$, *vagyis egy numerikus sor összege. Így* $0.1299\dot{9} = 0.1300\dot{0}$, *de ilyen egybeesés csak a tizedes törtek egy kis részénél van. Egész pontosan: éppen azoknak a számoknak van kétféle alakja, akik előállnak mint* véges *tizedes tört.*

7. tétel. $[0,1] \nsim \mathbb{N}$.

Bizonyítás. Cantor féle átlós eljárással. Azt bizonyítjuk, hogy a $\{0,1\}$ elemű sorozatok többen vannak, mint a természetes számok. A bizonyítás indirekt: ha valaki azt állítja, hogy ő felsorolta az összes $\{0,1\}$ elemű sorozatot, éspedig az ő n-edik sorozata $i_{n1}, i_{n2}, i_{n3}, \dots$ (ahol $i_{nk} \in \{0,1\}$ minden k-ra), akkor én mégis tudok mutatni egy sorozatot, ami az ő felsorolásában nem szerepel. Konkrétan:

$$j_n := \begin{cases} 0, & \text{ha } i_{nn} = 1 \\ 1, & \text{ha } i_{nn} = 0 \end{cases}$$

(röviden: $j_n := 1 - i_{nn}$). Ekkor látható, hogy a $j_1, j_2, j_2, \dots$ sorozat garantáltan nem szerepel a felsorolásban, hiszen minden n-re igaz, hogy az n-edik felsorolt sorozattól eltér – ha máshol nem is, hát az n-edik helyen biztosan. Ezzel ellentmondásra jutottunk, az indirekt bizonyítás kész. $\square$

8. megjegyzés. *Emiatt $\mathbb{Q} \nsim \mathbb{R}$, pedig $\mathbb{Q}$ sűrű $\mathbb{R}$-ben: bármely kis intervallumban van racionális szám.*

9. definíció. *Egy A halmaz kontinuum számosságú, ha $A \sim [0,1]$ (avagy $A \sim \mathbb{R}$).*

10. megjegyzés. *A sík pontjai is „csak” kontinuum sokan vannak, vagyis $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$. Ennek belátása legyen (nem túl nehéz) HF. Ugyanígy, minden (véges) n-re igaz, hogy $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}$.*

Kérdés: vajon van-e kontinuumnál nagyobb számosságú halmaz? A válasz egy tétel lesz, de előbb egy definíció:

11. definíció. *Egy X halmaz **hatványhalmazának** nevezzük az X összes részhalmazaiból álló halmazt. Jelölése $\mathcal{P}(X)$ vagy 2^X. Vagyis $\mathcal{P}(X) = 2^X = \{Y \mid Y \subset X\}$.*

A 2^X jelölést az indokolja, hogy ha X *véges* halmaz, akkor $\mathcal{P}(X)$ elemszáma éppen $2^{X \text{ elemszáma}}$.

12. tétel. *Minden X halmazra igaz, hogy $\mathcal{P}(X) \nsim X$*

Bizonyítás. Cantor féle átlós eljárással. Ha ügyesen átfogalmazzuk a 7 tétel bizonyítását, akkor szóról szóra alkalmazható erre az általános esetre is. □

13. következmény. *Minden számosságnál (tehát minden végtelen számosságnál is) van nagyobb. Van tehát egyre nagyobb végtelen számosságokból egy egész sorozatra való, vagyis a végtelen számosságok legalább megszámlálhatóan végtelen sokan vannak.*

Kérdés: Akkor mégis milyen sokan vannak a számosságok?
Válasz (kinyilatkoztatás): Számosságból olyan sok van, hogy **bármely** halmaz elemeinél is több.

14. megjegyzés. *Ez elsőre melepő, hiszen azt gondolnánk, hogy az $X = \{számosságok\}$ halmaz elemeinél csak nem lehetnek többen. Valóban: a halmazelmélet kellően gondos felépítése során kiderül, hogy a $\{számosságok\}$ halmaz nem létezik.*

További zárójeles megjegyzés: vajon van-e olyan halmaz, aminek a számossága nagyobb, mint megszámlálható, de kisebb, mint kontinuum? A válasz túl összetett ahhoz, hogy ide megpróbáljam leírni. Kulcsszavak a kereséshez: „kontinuum-hipotézis”, „eldönthetetlenség”, „Gödel-féle nem-teljességi tételek”.

2. Metrikus terek

Az alábbi definíció arról szól, hogy metrikának nevezzük azt a (kétváltozós, valós értékű) függvényt, ami mindazt tudja, amit a „távolság”-tól szokás szerint elvárunk.

15. definíció. *Legyen X nem üres halmaz. Egy $d : X \times X \to \mathbb{R}$ függvény **metrika** X-en, ha*

- *$d(x,y) \geq 0$ mindig (vagyis d nemnegatív),*
- *$d(x,y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$,*
- *$d(x,y) = d(y,x)$ mindig (vagyis d szimmetrikus),*
- *$d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ mindig (háromszög-egyenlőtlenség).*

*Ilyenkor az (X,d) párt **metrikus tér**nek nevezzük.*

16. lemma. *Ha (X, d) metrikus tér és $\emptyset \neq Y \subset X$, akkor $(Y, d\,|_{Y\times Y})$ is metrikus tér. Vagyis ha a metrikát megszorítjuk a tér egy részhalmazára, akkor ezzel a megszorított metrikával az illető részhalmaz maga is metrikus térré válik.*

Példák:

- $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$. Ez a szokásos metrika $\mathbb{R}$-en.
- $X \subset \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$. A szokásos metrika $\mathbb{R}$ egy tetszőleges részhalmazán.
- $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = |x - y|$, ahol az $||$ egy vektor szokásos (euklideszi) hosszát jelöli: $|(a_1, a_2, \dots a_n)| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$. Ez az **euklideszi** metrika $\mathbb{R}^n$-en.
- $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = ||x - y||_{\max}$, ahol az $||_{\max}$ egy vektor (abszolút értékben) legnagyobb elemét jelöli: $|(a_1, a_2, \dots a_n)|_{\max} := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$. Ez a **maximum** metrika $\mathbb{R}^n$-en.
- $X = \mathbb{R}$ (vagy $X = \mathbb{R}^n$), $d(x, y) := \sqrt{|x - y|}$. Ez is metrika, bár nem szokványos.
- $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) := |x - y|^2$. Ez **nem** metrika, mert nem teljesül a háromszög-egyemlőtlenség (pl. $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$-vel sem).
- $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) := |x^2 - y^2|$ vagy $d(x, y) := |x - 2y|$. Ezek **sem metrikák**, ellenőrzés könnyű HF.
- $X = \mathbb{R}$ (vagy $X = \mathbb{R}^n$), $d(x, y) := \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Ez is metrika. Ez számolással is ellenőrizhető, de inkább megemlítem, hogy speciális esete az alábbi fontos észrevételnek.

17. tétel. *Legyen d metrika X-en, és legyen $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ olyan függvény, amire*

- $f(0) = 0$,
- *f monoton növekvő, és*
- *f konkáv.*

Legyen továbbá $d' = f(d)$. (Vagyis: $d' : X \times X \to \mathbb{R}$, $d'(x, y) := f(d(x, y))$.) Ekkor d' is metrika X-en.

Bizonyítás. Nem írom ki, legyen szorgalmi HF. Egyedül a háromszög-egyenlőtlenség szorul ellenőrzésre, és az se nehéz, ha ez ember, tudja, hogy mit is jelent (képlet formájában), hogy egy f függvény **konkáv**: azt jelenti, hogy ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $0 \leq \lambda \leq 1$ (ez fontos!), akkor minden x-re és y-ra igaz, hogy

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Aki lerajzolja, látja, hogy ez mit is jelent, és miért van így. □

18. megjegyzés. *Az olyan $\lambda x + (1 - \lambda)y$ alakú pontok, ahol $0 \leq \lambda \leq 1$, éppen az x-et y-nal összekötő szakasz pontjai, és (érthető módon) úgy is nevezzük őket, hogy x és y konvex kombinációi. A konkáv f függvény fent emlegetett tulajdonsága a Jensen-egyenlőtlenség (legegyszerűbb speciális esete).*

A metrika fogalmának erejét mutatja a következő definíció, amiből kiderül, hogy távolról sem csak $\mathbb{R}$ vagy $\mathbb{R}^n$ elemeire lehet hasznos távolságfogalmat alkotni.

19. definíció. *Legyen $X \subset \mathbb{R}$ vagy $x \subset \mathbb{R}^n$ halmaz, és jelölje $C(X)$ az X-en értelmezett, valós értékű, folytonos és korlátos függvények halmazát. Vagyis*

$$C(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ folytonos és korlátos}\}.$$

*A $C(X)$ halmazon **szuprémum-metrikának** nevezzük az alábbi $d : C(X) \times C(X) \to \mathbb{R}$ függvényt:*

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ez a d valóban metrika, vagyis kielégíti a 15. definíció követelményeit.

20. megjegyzés. *Ahhoz, hogy ez a definíció értelmes legyen, nem fontos, hogy $X \subset \mathbb{R}$ vagy $X \subset \mathbb{R}^n$ legyen. Csak annyi kell, hogy értelme legyen egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvény folytonosságáról beszélni. Mint látni fogjuk, ehhez elég, ha X maga is metrikus tér.*

Ebben a metrikában két függvény akkor van egymáshoz „közel”, ha függvényértékeik közötti különbség mindenütt kicsi. Legyen pl. $X = [0, 1]$, és legyen f, g, h a $C([0, 1])$ három eleme:

$$f(x) = 0 \text{ minden } x\text{-re},$$

$$g(x) = \frac{1}{100}\sin(1000x),$$

$$h(x) = \begin{cases} 10, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{100000} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

Ekkor látható, hogy $d(f, g) = \frac{1}{100}$, vagyis a két függvény közel van, pedig a függvények „alakja” nem hasonlít. Ellenben $d(f, h) = 10$, vagyis ezek messze vannak, annak ellenére, hogy a két függvény az értelemezési tartomány nagy részén megegyezik.

Hogy megértsük, miért is hasznos igazán a szuprémum-metrika, a hozzá tartozó konvergencia-fogalmat érdemes vizsgálni.

21. megjegyzés. ***Analízis az a tudomány, ahol konvergenciával foglalkozunk.***

Először sorozatok konvergenciája jön (nem is nagyon kell más).

22. definíció. *Sorozatnak nevezünk minden olyan függyvényt, aminek az értelmezési tartománya $\mathbb{N}$.*

Számsorozatok pl. az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvények, és szokás az n-edik elemet – vagyis az n-hez rendelt függvényértéket $a(n)$ helyett a_n-nel is jelölni, a sorozatot pedig $a_1, a_2, \ldots a_n$-nek írni. Függvénysorozat pl. egy $f : \mathbb{N} \to C([a, b])$ függvény. Itt is f_n-nel célszerű jelölni a sorozat n-edik elemét, ami maga is függvény. Vagyis $f_n(x)$ minden $n \in \mathbb{N}$-re és $x \in [a, b]$-re egy szám. Rögzített x mellett pedig $f_n(x)$ egy számsorozat.

A következő definíció mindenkinek ismerős. A számsorozatok konvergenciájának definíciója szóról szóra ez volt, csak itt ügyelek arra, hogy olyan szavakkal mondjam el, amik általánosabban is értelmesek.

23. definíció. *Legyen (X, d) metrikus tér, és $x_1, x_2, \ldots$ egy X elemeiből álló sorozat, továbbá legyen $x \in X$. Azt mondjuk, hogy az x_n sorozat határértéke x (avagy x_n tart x-hez), ha minden pozitív $\varepsilon \in \mathbb{R}$-hez van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > N$-re $d(x_n, x) < \varepsilon$.*

Nézzük, mit is jelent az, hogy $C([a,b])$-ben függvények egy f_n sorozata konvergál egy f-hez? Mivel $d(f_n, f) = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$, a konvergencia definíciójában szereplő $d(f_n, f) < \varepsilon$ (lényegében) azt jelenti, hogy minden $x \in [a,b]$-re $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Vagyis – a definíciót kiírva látszik, hogy a $C([a,b])$-beli konvergencia éppen a függvények *egyenletes* konvergenciája, ami erősebb a pontonkénti konvergenciánál. Ezt mutatja a fenti h függvény mintájára konstruált h_n sorozat:

$$h_n(x) := \begin{cases} 10, & \text{ha } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

Könnyen látható, hogy ez a függvény-sorozat pontonként konvergál az azonosan nulla függvényhez (hiszen minden rügzített x-re igaz, hogy a $h_n(x)$ számsorozat egy idő után (egész pontosan $n > \frac{1}{x}$-re, kivéve ha $x = 0$, mert akkor minden n-re) csupa 0-ból áll. Másfelől $C([0,1])$-ben – vagyis egyenletesen – természetesen nem konvergál a nulla függvényhez, hiszen minden n-re $d(h_n, 0) = 10$.

24. definíció. *folytonosság, sorozatokkal*

A definícióból jól látszik, hogy egy függvény folytonossága nem egyéb, mint a függvény (alkalmazásának) felcserélhetősége a határérték-képzéssel: $f(lim(\dots)) = lim(f(\dots))$.

25. definíció. *folytonosság, epszilon-deltával*

Ki fogunk mondani egy fontos tételt a folytonosság és a nyílt halmazok kapcsolatáról, de előbb jópár, nyílt halmazokkal kapcsolatos fogalom következik.

26. definíció. *gömb metrikus térben*

27. definíció. *halmaz belső pontja*

28. definíció. *nyílt halmaz metrikus térben*

29. definíció. *halmaz torlódási pontja*

30. definíció. *zárt halmaz metrikus térben*

31. tétel. *Egy halmaz akkor és csak akkor zárt, ha a komplementere nyílt.*

32. definíció. *halmaz lezártja*

33. definíció. *halmaz függvény általi képe; halmaz függvény általi inverz képe*

Tétel a nyílt halmazok és a folytonos függvények kapcsolatáról:

34. tétel. *Metrikus teret metrikus térbe képező függvény akkor és csak akkor folytonos, ha minden nyílt halmaz teljes inverz képe nyílt.*

35. következmény. *Metrikus teret metrikus térbe képező függvény akkor és csak akkor folytonos, ha minden zárt halmaz teljes inverz képe zárt.*

36. megjegyzés. *Az előző tételben lényeges, hogy halmazok* inverz *képiről szól. Nem igaz, hogy minden nyílt halmaz folytoson képe nyílt lenne, sem az, hogy minden zárt halmaz folytonos képe zárt lenne. Példa erre a $[-1,1]$ intervallum képe az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ függvény által, illetve az $\mathbb{R}$ halmaz képe az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x$ függvény által.*

Nyílt és zárt halmazok uniójának, metszetének tulajdonságai:

37. tétel. *Véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt.*

38. tétel. *Akárhány nyílt halmaz uniója is nyílt.*

39. tétel. *Véges sok zárt halmaz uniója is zárt.*

40. tétel. *Akárhány zárt halmaz metszete is zárt.*

41. megjegyzés. *Ahol ki van kötve, hogy* véges sok *halmazról van szó, ott ez lényeges: nem igaz pl., hogy végtelen sok nyílt halmaz metszete is mindig nyílt lenne. Pl. ha vesszük a* $(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ *nyílt intervallumok metszetét minden* $n \in \mathbb{N}$*-re, az az egyelemű* $\{0\}$ *halmaz lesz, ami persze nem nyílt.*

Ahol viszont az állítás akárhány *halmazról szól, ott megengedett végtelen sok, sőt nem feltétlenül megszámlálhatóan végtelen – de még csak nem is feltétlenül kontinuum – sok, hanem akár annál sokkal több halmaz uniója vagy metszete is.*

3. A triadikus Cantor-halmaz

42. definíció. *Triadikus Cantor-halmaz.*

- *Legyen* C_0 *a* $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ *halmaz, ami* 1 *darab* 1 *hosszú zárt intervallum.*
- *Ebből a* C_1*-et úgy kapjuk, hogy kivágjuk a középső* $\frac{1}{3}$*-át (a végpontokat benthagyva). Így* C_2 *már* 2 *darab* $\frac{1}{3}$ *hosszú zárt intervallum uniója.*
- *Ebből a* C_2*-t úgy kapjuk, hogy kivágjuk mindkét intervallum középső* $\frac{1}{3}$*-át (a végpontokat benthagyva). Így* C_2 *már* 4 *darab* $\frac{1}{9}$ *hosszú zárt intervallum uniója.*
- *Minden további lépésben kivágjuk az összes intevallum középső* $\frac{1}{3}$*-át (a végpontokat benthagyva). Így újra és újra valahány (véges sok) zárt intervallum unióját kapjuk. Konkrétan: minden* $k \in \mathbb{N}$*-re a* C_k *halmaz* 2^k *darab* $\frac{1}{3^k}$ *hosszú zárt intervallum uniója.*

Mivel minden lépésben csak kivágtunk pontokat, a kapott halmaz-sorozat szűkülő:

$$C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_k \supset \ldots .$$

Triadikus Cantor-halmaznak nevezzük és C*-vel jelöljük a* $[0, 1]$ *azon pontjait, akik mind a végtelen sok kivágás után megmaradnak, vagyis*

$$C := \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k.$$

Első pillantásra nem nyilvánvaló kérdés, hogy C nem üreshalmaz-e: marad egyáltalán valami a végtelen sok kivágás után?

Könnyen látható azonban, hogy marad: az $\frac{1}{3}$ pont például mindig elkerüli a kivágást – és hasonlóan látható, hogy mindazon pontok, akik valahanyadik lépésben pont az egyik megmaradó intervallum végére kerülnek, onnantól örökre biztonságban érezhetik magukat. Ez azonban csak megszámlálható sok pont, ezért érdekes a következő tétel:

43. tétel. *C kontinuum számosságú.*

Ez könnyen következik az alábbi, távolról sem nyilvánvaló tételből:

44. tétel. *C elemei kölcsönösen egyértelműen megfeleltethetők a $\{0,2\}$ sorozatoknak.*

A megfeleltetést kétféleképpen is érdemes látni:

1. C éppen azokból a $[0,1]$-beli számokból áll, akiknek **3-as számrendszer**beli alakjában nem szerepel az 1-es számjegy. Pontosabban: azokból, akik felírhatók 3-as számrendszerben úgy, hogy minden számjegy 0 vagy 2. (A finom különbség abból adódik, hogy bizonyos számok kétféleképpen is felírhatók, így pl. $0.100\dot{0}$ és $0.022\dot{2}$ ugyanazt a számot jelöli 3-as számrendszerben (az $\frac{1}{3}$-ot). A második felírásból látszik, hogy ez a szám benne van C-ben.) Képlettel:

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} a_i 3^{-i} \middle| a_i \in \{0,2\} (i = 1, 2, \dots) \right\}.$$

2. **Kódolás**: A C egy pontja lépésről lépésre „éli túl" a konstrukciót. Írjunk hát le minden lépésben egy 0-t, ha a pontunk az aktuális intervallumnak (aminek éppen kivágtuk a közepét) a „bal" $\frac{1}{3}$-ában van, és egy 2-est, ha a „jobb" $\frac{1}{3}$-ában.

Azt még könnyű látni – a két látásmód bármelyikével, – hogy a C minden pontja megfelel egy $\{0,2\}$ sorozatnak, és különböző pontokhoz különböző sorozat tartozik. Ami nem nyilvánvaló, az az, hogy ez fordítva is így van: tényleg minden $\{0,2\}$ sorozatnak megfelel a fenti módon a C egy pontja. Ez az alábbi – megint nem nyilvánvaló – állításból következik:

1. tény. *Valós számok nemüres, zárt intervallumaiból álló szűkülő sorozat metszete sem üreshalmaz.*

45. megjegyzés. *Ez a tény a valós számok halmazára jellemző mély tulajdonság, ami a valós számfogalom bizonyos felépítésében mint axióma szerepel, más felépítésekben tétel. Ez az egyik megfolgalmazása annak, hogy* a valós számok halmaza teljes*. Érdemes észrevenni, hogy ugyanez nem igaz pl. a racionális számok halmazára.*

A következő tétel a Cantor-halmaz legfontosabb topológiai tulajdonságait mondja ki. (Topológiai tulajdonságok azok, amik nyílt és zárt halmazok, környezetek nyelvén elmondhatók. Más szóval: a topológia a nyílt halmazok tudománya.)

46. tétel. *A triadikus Cantor-halmaz topológiai tulajdonságai:*

- *C zárt.*
- *C-nek egyik pontja sem izolált pont, vagyis minden pontja egyben torlódási pontja is.*
- *C-nek nincs belső pontja, vagyis C nem tartalmaz intervallumot.*

3.1. Mese a dimenzióról

Legyen H olyan halmaz $\mathbb{R}^n$-ben (lehet a szemléletesség kedvéért $n = 1$, 2 vagy 3), aminek valamilyen értelmes módon beszélni tudunk a *dimenziójáról*, és valamiféle *méretéről*. Ekkor a két fogalom szorosan összefügg.

- Ha H dimenziója 0 – vagyis H csak diszkrét pontokból áll, akkor a megfelelő érdekes méret-fogalom a **darabszám**.
- Ha H dimenziója 1 – vagyis H egy szakasz vagy görbe, akkor a megfelelő érdekes méret-fogalom a **hosszúság** vagy **ívhossz**.
- Ha H dimenziója 2 – vagyis H egy síktartomány vagy felület, akkor a megfelelő érdekes méret-fogalom a **terület** vagy **felszín**.
- Ha H dimenziója 3, akkor a megfelelő érdekes méret-fogalom a **térfogat**.

Fontos látni, hogy ha nem a megfelelő méret-fogalmat használjuk – pl. egy felületnek az ívhosszát vagy a térfogatát próbáljuk mérni, akkor az eredmény elkerülhetetlenül 0 vagy ∞ lesz.

A halmaz dimenziója kiolvasható abból, hogy a halmaz nagyításával vagy kicsinyítésével **a méret hogyan skálázódik**. Jelölje $\mu(H)$ a H halmaz „méretét” – amelyik méretfogalom éppen értelmes rá. Jelölje továbbá $\lambda \in \mathbb{R}^+$-ra λH a H-ból λ-val való (elemenkénti) szorzással kapott halmazt:

$$\lambda H := \{\lambda x \mid x \in H\}.$$

Ez nem más, mint a H-nak λ-szorosra nagyítása (ami persze kicsinyítés, ha $\lambda < 1$).

A fenti példákon győződjünk meg róla, hogy

$$\mu(\lambda H) = \lambda^d \mu(H),$$

ahol d **a H halmaz – és egyen a μ mérték-fogalom dimenziója**.

3.2. A Cantor-halmaz dimenziója

a Cantor-halmaz egyik legérdekesebb tulajdonsága, hogy **önhasonló**:

$$C \cap [0, \frac{1}{3}] = \frac{1}{3}C,$$

ahol $\frac{1}{3}C$ még mindig a C-nek $\frac{1}{3}$-ára kicsinyítettje, továbbá

$$C \cap [\frac{2}{3}, 1] = \frac{1}{3}C + \frac{2}{3}.$$

A Cantor-halmaz tehát előáll, mint önmagából két darab $\frac{1}{3}$-ra kicsinyített példány uniója:

$$C = (\frac{1}{3}C) \cup (\frac{1}{3}C + \frac{2}{3}).$$

Ezért, ha van a Cantor-halmazra értelmes dimenzió- és mértékfogalom, akkor teljesülni kell annak, hogy

$$\mu(C) = \mu\left((\frac{1}{3}C) \cup (\frac{1}{3}C + \frac{2}{3})\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^d \mu(C) + \left(\frac{1}{3}\right)^d \mu(C),$$

ahol d a Cantor-halmaz dimenziója.

Kinyilatkoztatás:

1. Van ilyen, értelmes mérték-fogalom.
2. $\mu(C) \neq 0$.

A fentiekből könnyen következik, hogy $1 = 2(\frac{1}{3})^d$, vagyis

$$d = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

47. megjegyzés. *A fenti dimenzió- és mértékfogalom neve a matematikában* Hausdorff-dimenzió *és* Hausdorff-mérték*.*

4. ami kimaradt

Jelen formájában (március 23-án este) a vázlat kb. 3 és fél előadás anyagát fedi. Ami kimaradt (4. ea 2. fele és 5. ea):

- kompakt halmazok definíciója, példák, miért szeretjük őket
- algebra alaptételének bizonyítása
- mi az a teljes metrikus tér és miért szeretjük.

Egyelőre eddig jutottam, bocs.

Folyt. köv.