**Matematika Plusz 1 első ZH**
**2009. március 26.**
utólag javított változat

Minden feladat 15 pont, megszerezhető összesen max. 75 pont.

1. Bizonyítsuk be, hogy a $[0,1)$ és a $(0,2)$ intervallumok (mint a valós számok halmazának részhalmazai) azonos számosságúak!

2. Legyen $C([0,1])$ a $[0,1]$ intervallumon értelemezett folytonos (és korlátos) valós értékű függvények tere a szokásos (szuprémum-) metrikával. Legyen

$$B = \left\{ f \in C([0,1]) \,\middle|\, |f(x)| \leq 1 \text{ minden } x\text{-re} \right\},$$

vagyis $B$ a *zárt egységgömb* $C([0,1])$-ben.

Igaz-e, hogy $B$ kompakt $C([0,1])$-ben?

3. A triadikus Cantor-halmaz mintájára álljon az $M$ halmaz a $[0,1]$ intervallum mindazon pontjaiból, akik felírhatók úgy a tizes számrendszerben, hogy minden számjegy 0, 2 vagy 9. Mennyi ennek az $M$ halmaznak a (Hausdorff-) dimenziója?

4. Tekintsük a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazát a szokásos metrikával: $d(x,y) = |x-y|$. Kompakt-e a $[0,1] \subset \mathbb{Q}$ intervallum ebben a metrikus térben?

5. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, amire $f(0) = 1$, és $f(x) > 2$ teljesül minden olyan $x$-re, amire $|x| > 100$ (itt $|x|$ az $x$ vektor hosszát jelöli).

Bizonyítsuk be, hogy $f$-nek van $\mathbb{R}^2$-n abszolút minimuma.

6. Legyen $X$ tetszőleges nemüres halmaz, rajta $d$ az úgynevezett *diszkrét metrika*:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = y \\ 1, & \text{ha nem.} \end{cases}$$

   (a) Bizonyítsuk be, hogy $d$ valóban metrika $X$-en.
   (b) Mik a konvergens sorozatok az $(X,d)$ metrikus térben?
   (c) Mik a Cauchy-sorozatok az $(X,d)$ metrikus térben?
   (d) Teljes-e ez a metrikus tér?

7. Bizonyítsuk be, hogy a $[0,1]$ intervallum és a $[0,1] \times [0,1]$ egységnégyzet számossága azonos.

8. Bizonyítsuk be, hogy (tetszőleges metrikus térben) minden kompakt halmaz korlátos.

9. Bizonyítsuk be, hogy (tetszőleges metrikus térben) minden kompakt halmaz zárt.