

Matematika Plusz 1 második ZH
2009. május 14., utólag javított változat

Minden feladat 15 pont, megszerezhető összesen max. 75 pont.

1. Mit nevezünk egy $[0, 1]$ -en értelmezett f függvény L^2 normájának? Mennyi az $f(x) = x$ függvény normája? Mennyi az $f(x) = x$ és a $g(x) = x^2$ függvény távolsága az L^2 normából származó metrikában?
2. Mit mond ki a mátrixokra vonatkozó dimenziótétel?
3. Mit mond ki az alterekre vonatkozó dimenziótétel?
4. Mi az $a_1 = (1, 2, 3)^T$, $a_2 = (4, 5, 6)^T$, $a_3 = (0, 1, 3)^T$ -ből álló vektorrendszer Gram-mátrixa, és mi köze van valamiféle térfogathoz?
5. Legyen \mathbb{R}^4 három vektora $w_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $w_2 = (1, 2, 3, 4)^T$ és $v = (0, 3, 4, 3)^T$. Keressük meg v merőleges vetületét a w_1 és w_2 által kifeszített altérre!
6. Legyen \mathbb{R}^4 -ben W az $a_1 = (1, 1, 1, 1)^T$ és $a_2 = (2, 3, 4, 5)^T$ vektorok által kifeszített kétdimenziós altér. Keressük meg a W -re való merőleges vetítés mátrixát!
7. Oldjuk meg legkisebb négyzetes értelemben a

$$a + 1b = 0 \quad (1)$$

$$a + 2b = 3 \quad (2)$$

$$a + 3b = 4 \quad (3)$$

$$a + 4b = 3 \quad (4)$$

(túlhatározott) lineáris egyenletrendszert!

8. Brit kutatók vizsgálták, hogyan függ az egyetemi hallgatók csalódottság-indexe (y) az elmúlt egy hétben megírt sikertelen ZH-k számától (x). A mérésekből a következő táblázat adódott:

sikertelen vizsgák száma	0	1	2	3
csalódottság-index	0	3	4	3

Elméleti megfontolások alapján a két mennyiség között $y = ax + b$ összefüggés várható. Keressük meg a és b legjobb értékeit a legkisebb négyzetes értelemben!

9. Keressük meg az a és b paraméterek értékét úgy, hogy az $y = ax + bx^2$ függvény a legkisebb négyzetes értelemben a lehető legjobban illeszkedjen az alábbi adatokra:

x	1	2	3	4
y	-194	162	0	0

10. Legyen \mathbb{R}^4 -ben $u_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $u_2 = (1, 2, 3, 4)^T$ és $u_3 = (1, 3, 5, 7)^T$. Mennyi a három vektor által kifeszített paralelepipedon (\mathbb{R}^4 -beli, 3-dimenziós) térfogata?
11. Keressük meg az

$$1x + 1y + 1z + 1v = 4 \quad (5)$$

$$1x + 2y + 3z + 4v = 10 \quad (6)$$

lineáris egyenletrendszer összes $(x, y, z, v)^T$ megoldásvektorai közül a legrövidebbiket!

12. Számoljuk ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix általánosított inverzét!

13. Számoljuk ki az előbbi A mátrix transzponáltjának általánosított inverzét!