Fizikus MSc Matematikai problémamegoldó gyakorlat (BMETE95MF00) ütemterv

2011 ősz

1. **Matematikai eszközök (részben ismétlés)**
   (a) Topológia, differenciálgeometria alapfogalmai (sokaságok, külső szorzás, térfogati formák, ...), Lie-csoportok **(szept. 9., 16.)** (*BP*)
      - W. M. Boothby: An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry
      - V. I. Arnold: A mechanika matematikai módszerei

   (b) Komplex függvénytan **(szept. 23.)** (*Mogy*)
      - Laurent sorfejtés, konform leképzések, kontúrintegrálok, Fourier-Laplace transzformáció

   (c) Mérték- és integrálelmélet (dominált és monoton konvergencia tételek, Fatou lemma, Fubini tétel, Radon-Nykodim tétel, feltételes várható érték, Haar mérték) **(szept. 30.)** (*BP*)
      - R. B. Ash: Measure, integration, and functional analysis
      - P. Walters: Ergodic theory: introductory lectures (Haar mérték)

2. **Parciális diffegyenletek:**
   (a) Lineáris parciális differenciálegyenletek megoldása (tér- és időváltozók szeparálása, Fourier módszerek, Green függvény) **(okt. 7.)** (*Mogy*)
      - L. C. Evans: Partial differential equations

   (b) Nemlineáris parciális differenciálegyenletek: megmaradási törvények és Hamilton-Jacobi egyenletek, nemlineáris hullámok **(okt. 14.)** (*Mogy*)
      - L. C. Evans: Partial differential equations

1. **Beszámolók: (okt. 21.)**

3. **Sztochasztikus folyamatok:** Fizikához közeli folyamatok és alkalmazások
   (a) Markov folyamatok: diszkrét időben (pl. bolyongások, esetleg kapcsolat áramkörökkel), Poisson folyamat, folytonos idejű ugró és nem ugró folyamatok (Brown-mozgás és hővezetési egyenlet) **(okt. 28., nov. 4., (18.))** (*Mogy*)
      - S. I. Resnick: Adventures in Stochastic Processes

4. **Ergodelmélet és dinamikai rendszerek:**
   (a) Alap definíciók, ergodtételek, alkalmazások; fraktálok **(nov. 11., (18.))** (*BP*)
      - M. Brin, G. Stuck: Introduction to dynamical systems

   (b) Néhány példa a statisztikus fizika matematikai módszereiből (dualitás, kontúrok?); pár szó a perkolációról **(nov. 18.)** (*Mogy*)
      - G. Grimmett: Percolation

2. **Beszámolók: (dec. 2.)**

3. **Beszámolók: (dec. 9.)**

Dátum	Téma	Beadandó
szept. 9.	Topológia, diff.geo. alapjai	-
szept. 16.	Differenciálgeometria	**HF#1**
szept. 23.	Komplex függvénytan	**HF#2**
szept. 30.	Mértékelmélet	**HF#3**
okt. 7.	Lineáris parc. diff.egyenletek	**HF#4**
okt. 14.	Nemlineáris parc. diff.egyenletek	**HF#5**
okt. 21.	-	**1. beszámoló**
okt. 28.	Sztochasztikus foly.	**HF#6**
nov. 4.	Sztochasztikus foly.	**HF#7**
nov. 11.	Ergodelmélet	**HF#8**
nov. 18.	Stat. fiz, ergodelm.	**HF#9**
dec. 2.	-	**2. beszámoló**
dec. 9.	-	**3. beszámoló**

Az 1. beszámolók témái (október 21.):

1. Julia halmazok, Mandelbrot halmaz
2. Spinorok matematikája
3. Vektormezők felületeken
4. Riemann sejtés

Összetettebb feladatok a 2. és 3. beszámolóra (december 2. és 9.):

Analízis (topológia):

5. Baire kategória tétel
6. Arzela-Ascoli tétel

Parciális differenciál-egyenletek:

7. Burgers-egyenlet

Sztochasztikus folyamatok:

8. Nem-standard centrális határeloszlás-tétel, stabil eloszlások
9. Gyenge invariancia elv
10. Felújítási tétel
11. Erdős-Rényi véletlen gráf modell
12. Születési-halálozási folyamatok
13. Barabási-Albert véletlen gráfnövekedési modell
14. Egyszerű kizárásos folyamat

Dinamikai rendszerek:

15. Lorentz-folyamat

16. Lorenz attraktor
17. Gauss leképezés és lánctörtek
18. Egydimenziós leképezések mint dinamikai rendszerek (pl. periodikus pontok és bifurkációik a logisztikus családban)
19. Poincaré-Bendixson tétel
20. Áramköröket leíró diffegyenletek kvalitatív elemzése

Határeset:

21. Entrópia sztochasztikus folyamatokban és/vagy dinamikai rendszerekben

Házi feladatok a következő oldalon.

Bálint Péter, Tóth Imre Péter

Házi feladatok

Fizikus MSc Matematikai problémamegoldó gyakorlat, 2011 ősz

Minden héten 12 pontnyi feladat van kitűzve, mindegyik beadandó. A feladat annyi pontot ér, ahány • van mellette. Részpontszámokat adunk, de válaszokat csak indoklással fogadunk el.

1.HF: (Beadási határidő: 2011.09.16.)

HF 1.1••• Emlékeztető – egy metrikus térből metrikus térbe való $\Phi : (M, d_M) \to (N, d_N)$ leképezés folytonosságának két lehetséges definíciója:

Definíció 1 Minden (M-beli) nyílt hamaz őslépe nyílt halmaz (N-ben).

Definíció 2 $\forall x \in M$ pontra, és $\forall \varepsilon > 0$-ra $\exists \delta > 0$ (ez függhet ε-tól és x-től is), hogy $y \in M$, $d_M(x, y) < \delta$ esetén $d_N(\Phi(x), \Phi(y)) < \varepsilon$.

Mutassuk meg, hogy ha Φ Definíció 1 értelmében folytonos, akkor Definíció 2 értelmében is az. (Megj: ez könnyebb, mint az órán bizonyított másik irány.)

HF 1.2•• Legyen M teljes szeparábilis metrikus tér, $K \subset M$ kompakt halmaz. Emlékeztető: ez azt jelenti, hogy K minden nyílt fedéséből kiválasztható véges nyílt fedés. Mutassuk meg, hogy K mindenképpen korlátos, azaz lefedhető egy gömbbel: $\exists\ R > 0$ és $x \in M$, hogy $K \subset B_R(x)$.

HF 1.3 Tetszőleges $\Phi : M \to N$ leképezés esetén egy $A \subset M$ halmaz képe a $\Phi(A) = \{\Phi(x) | x \in A\}$ halmaz N-ben.

a) •• Legyen most M és N metrikus tér, $\Phi : M \to N$ folytonos leképezés. Mutassuk meg, hogy ekkor egy $K \subset M$ kompakt halmaz $\Phi(K)$ képe kompakt (N-ben).

b) •• Mutassunk példát arra, hogy egy folytonos leképezés esetén (i) nyílt halmaz képe nem feltétlenül nyílt; (ii) kompakt halmaz ősképe nem feltétlenül kompakt.

HF 1.4••• Forgassuk meg a $(b, 0)$ középpontú, a sugarú körvonalat az origó körül ($b > a > 0$ tetszőleges számok), a kapott felület a $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ tórusz. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{T}^2$ egy kétdimenziós C^∞ sokaság. (Megj.: az órán tanultak alapján: elég az $\mathbb{S}^1$ körvonal egy térképezését megkonstruálni (miért?))

2.HF: (Beadási határidő: 2011.09.23.)

HF 2.1 Legyen M egy sima sokaság, X és Y sima vektormezők M-n. M minden p pontjában értelmezhetjük az alábbi lineáris operátorokat, melyek a (p kis környezetében értelmezett) f sima függvényeken hatnak: (i) $(XY)_p(f) = X_p(Y(f))$; (ii) $(YX)_p(f) = Y_p(X(f))$, (iii) $[X, Y]_p = (XY)_p - (YX)_p$. Szavakban kifejezve: (i) és (ii) a két vektormező kétféle sorrendben vett egymás utáni alkalmazásával kapott operátor, (iii) pedig ezek különbsége. Mutassuk meg, hogy

a) •• $(XY)_p$ ugyan lineáris operátor (ellenőrizzük ezt is), de mégsem érintővektor, mert nem feltétlen teljesíti a Leibniz szabályt;

b) •• $[X, Y]_p$ érintővektor, azaz rá a Leibniz szabály is teljesül. (Az így adódó M-n értelmezett sima vektormezőt – $[X, Y]$-t – az X és Y vektormezők kommutátorának vagy Lie-zárójelének is szokták nevezni.)

Útmutatás: a (b) feladatnál ellenőrizni kell, hogy a Leibniz szabály tetszőleges f, g függvényekre és X, Y vektormezőkre teljesül. (a)-hoz elég mutatni egy ellenpéldát, ilyen már abban az esetben is van, amikor $M = \mathbb{R}^2$, X és Y parciális deriválások, f és g pedig koordináta-függvények.

HF 2.2 Szemléltessük az alábbi vektormezőket és az általuk generált egyparaméteres csoporthatásokat.

a) $^{\bullet\bullet}$ Tekintsük $\mathbb{R}^3$-n a

$$\Theta(t,\underline{x}) = \begin{pmatrix} \cos at & \sin at & 0 \\ -\sin at & \cos at & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

egyparaméteres csoporthatást, ahol $a > 0$ tetszőleges pareméter. Milyen vektormező generálja $\Theta(t,\underline{x})$-t? Mutassuk meg, hogy ez a csoporthatás természetes módon megszorítható $\mathbb{S}^2$-re: $\underline{x} \in \mathbb{S}^2$ (azaz $|\underline{x}| = 1$) esetén $\Theta(t,\underline{x}) \in \mathbb{S}^2$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Szemlétessük a vektormezőt és a csoporthatást is $\mathbb{S}^2$-n.

b) $^{\bullet\bullet}$ Tekintsünk $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$-re úgy, mint a $[0,1] \times [0,1]$ egységnégyzetre, melynek a szemközti oldalait azonosítjuk. Így az (azonosított) négyzetoldalaktól eltekintve az (x_1, x_2), $0 < x_1 < 1$, $0 < x_2 < 1$ koordináták egy térképezését adják $\mathbb{T}^2$-nek. Legyenek az X és az Y vektormezők ezen a térképen $X = \frac{\partial}{\partial x_1} + 2\frac{\partial}{\partial x_2}$, illetve $Y = \frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_2}$ (ezek a teljes $\mathbb{T}^2$-re folytonos módon kiterjeszthetők). Milyenek lesznek a generált egyparaméteres csoporthatások pályái? (Hasonlítsuk össze X és Y pályáit.)

HF 2.3 Az alábbi differenciálformák közül melyik zárt és melyik egzakt?

a) $^{\bullet}$ $M = \mathbb{R}^3$-n a standard koordinátákkal $\alpha = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$;

b) $^{\bullet}$ $M = \mathbb{R}^3$-n a standard koordinátákkal $\beta = x\,dx + x^2y^2\,dy + yz\,dz$;

c) $^{\bullet\bullet}$ $M = \mathbb{S}^1$, erre úgy tekintünk, mint a $[0,1]$ intervallumra a két végpontjával azonosítva, a $0 < x < 1$ koordináta az (azonosított) végpontoktól eltekintve ad egy térképet, ezen a térképen $\gamma = dx$, melyet aztán folytonos módon kiterjesztünk $\mathbb{S}^1$-re.

3. HF: (Beadási határidő: 2011.09.30.)

HF 3.1$^{\bullet\bullet\bullet\bullet}$ **Tört-lineáris leképezések.** Tört-lineáris leképezésnek vagy lineáris tört-leképezésnek nevezzük a

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

alakú leképezéseket, ahol a, b, c, d komplex számok és a tört nem egyszerüsíthető – vagyis $ad \neq bc$. Egy ilyen leképezés értelmezési tartománya a komplex számsík, kivéve az egyetlen $P = -\frac{d}{c}$ pontot. Ezen a tartományon a leképezés természetesen holomorf.

a.) Mutassuk meg, hogy egy ilyen leképezés , mint $\mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$-n értelmezett $\mathbb{R}^2$-értékú függvény, konform. (Útmutatás: ehhez milyen apróság is kell még azon kívül, hogy mint komplex függvény, holomorf?)

Érdekes és hasznos tény, hogy a tört-lineáris leképezések a sík minden egyenesét egyenesbe vagy körbe viszik át, és a sík köreit szintén egyenesbe vagy körbe. Ennek bizonyításáról szól ez a feladat.

b.) Legyen $z = x + iy$ és $w = 1/z = u + iv$ ahol x, y, u, v valósak. Irjuk fel konkrétan az $u(x,y)$, $v(x,y)$ $x(u,v)$ és $y(u,v)$ függvényeket.

c.) Lássuk be, hogy a valós síkon minden kör és egyenes egyenlete

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \tag{1}$$

alakba írható. Fordítva, minden (1) egyenlet egyenest vagy kört ír le, amennyiben $B^2 + C^2 > 4AD$.

d.) A b.) pont és (1) alapján mutassuk meg, hogy a $w = 1/z$ inverzió egyenest egyenesbe vagy körbe, kört is egyenesbe vagy körbe visz át.

e.) Mutassuk meg, hogy z komplex affin transzformálása (azaz $\hat{z} = pz + q$; p, $q \in \mathbb{C}$, $p \neq 0$) kört körbe visz és egyenest egyenesbe visz.

f.) Egy *lineáris törtleképezés*

$$w(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

alakú, ahol $ad \neq bc$ komplex számok. Mutassuk meg, hogy akár z, akár w, vagy akár mindkettő komplex affin transzformálása után a transzformáltak között továbbra is egy lineáris törtleképzés a kapcsolat.

g.) Az előzőek alapján lássuk be, hogy bármely lineáris törtleképzés egyenest egyenesbe vagy körbe, kört is egyenesbe vagy körbe visz át.

HF 3.2 Az előző feladatból tudjuk, hogy lineéris törtleképezések a sík minden körét egyenesbe vagy körbe viszik át.

a.) • Melyek azok a körök, amiket a $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ leképezés nem körbe, hanem egyenesbe visz? (Segítség: az egyenes nem korlátos halmaz, vannak pontjai „végtelen messze”.)

b.) • Keressünk olyan konform leképezést, ami a $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$ egységkörlapot a $H = \{(x, y) : y > 0\}$ felső félsíkba viszi. (Útmutatás: először csak vigyük a kört egy akármilyen egyenesbe, aztán szükség esetén toljuk el és forgassuk.)

c.) •• Legyen $A = (-2; 0)$, $B = (0; 2/3)$, $C = (2; 0)$, $D = (0; -1)$ a sík négy pontja. Legyen L az a „lencse alakú” korlátos, nyílt síkbeli halmaz, amit felülről az A, B, C pontokra illeszkedő körív, alulról pedig az A, D, C pontokra illeszkedő körív határol. Oldjuk meg ezen az L tartományon a

$$\Delta u = 0, \quad u = 0 \text{ az alsó köríven}, \quad u = 1 \text{ a felső köríven}$$

Dirichlet-feladatot! (Útmutatás: keressünk olyan konform leképezést, ami mindkét körívből (fél)egyenest csinál, az egyik metszéspontjukat pedig (a szépség kedvéért) az origóba viszi.)

d.) • Mik a hőáramlás görbéi (ha $u(x, y)$-t hőmérsékletnek tekintjük)? (Útmutatás: mi Arg harmonikus konjugáltja?)

HF 3.3 Tekintsük a Dirichlet-feladatot a felső félsíkon, *azonosan nulla* peremfeltétellel. Ennek természetesen megoldása az $u(x, y) \equiv 0$ azonosan nulla függvény.

a.) • Mutassuk meg, hogy az $u(x, y) = xy$ is megoldás.

b.) Emlékezzünk az előadásra: azt, hogy $u(x, y) = xy$ harmonikus, tudtuk anélkül, hogy lederiváltuk volna. Honnan is?

c.) • Ennek mintájára keressünk még nagyon sok megoldását a fenti Dirichlet-feladatnak. Ezután keressünk még ennél is több megoldást.

d.) Ha ezt a Dirichlet-problémát úgy nézzük, mint egy hővezetési feladatot egy fémlemezen, miért az $u(x, y) \equiv 0$ az egyetlen „fizikai” megoldás? Mi a baj a többivel?

e.) • Mutassuk meg, hogy a felső félsíkon a Dirichlet-problémának *bármilyen peremfeltétellel*, ha van egy megoldása, akkor nagyon sok megoldása is van. Mi alapján lehet ezek közül kiválasztani (épeszű peremfeltétel esetén) egy „fizikai” megoldást?

f.) • **bónusz:** Az egységkörlap (vagy a lencse) – mint az előző feladatban láttuk, és mint a Riemann leképezési tételből tudtuk is – konform ekvivalens a felső félsíkkal. Tekintsük hát most a Dirichlet feladatot az egységkörlapon (vagy a lencsén), azonosan nulla peremfeltétellel. Ez „lefordítható” a felső félsíkon vett Dirichlet-feladatra. Akkor ennek is végtelen sok megoldása van? Ez végképp ellentmondana a megoldásról mint stacionárius hőmérséklet-profilról alkotott képünknek. (Segítség: az egységkörlap mint *nyílt halmaz* volt konform-ekvivalnes a félsíkkal mint *nyílt halmazzal*, és a Laplace-egyenlet is a nyílt halmazon érvényes. Ehhez képest a peremfeltételt a körvonalon adom meg, ami nincs is benne a halmazban. Hogy is kell akkor a peremfeltételt érteni?)

4.HF: (Beadási határidő: 2011.10.07.)

HF 4.1••• Legyen $\mathcal{F}$ egy σ-algebra, $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ *végesen* additív halmazfüggvény (azaz $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$ esetén $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$), és teljesüljön $\mu(\emptyset) = 0$ is. Mutassuk meg, hogy a következő tulajdonságok ekvivalensek:

(i) μ σ-additív, azaz ha $A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots$, ahol $A_i \in \mathcal{F}$ $\forall i$, és $A_i \cap A_j = \emptyset$ ha $i \neq j$: akkor $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. (Másképp szólva μ mérték.)

(ii) Legyen $B_i \in \mathcal{F}$ tetszőleges *monoton növekvő* halmazsorozat, azaz $B_i \subset B_{i+1}$ $\forall i$. Ekkor $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n)$.

(iii) Legyen $C_i \in \mathcal{F}$ tetszőleges *monoton csökkenő* halmazsorozat, azaz $C_{i+1} \subset C_i$ $\forall i$. Ekkor $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(C_n)$.

HF 4.2 Tekintsük a következő Borel mérhető halmazokat $\mathbb{R}$-ben:

a) •• Módosítsuk a triadikus Cantor halmaz konstrukcióját a következőképpen: induljunk ki a $[0, 1]$ intervallumból, és első lépésben vágjuk ki a $(\frac{3}{8}, \frac{5}{8})$ nyílt intervallumot, vagyis a közepéből egy $\frac{1}{4}$ hosszúságú szakaszt. Így kapjuk a D_2 halmazt, amely két zárt intervallumból áll; a második lépésben mindkettő közepéből vágjunk ki egy-egy $\frac{1}{16}$ hosszúságú nyílt intervallumot (konkrétan kivágjuk az $(\frac{5}{32}, \frac{7}{32})$ és $(\frac{25}{32}, \frac{27}{32})$ nyílt intervallumokat). A k-dik lépésben a D_k halmazt tekintjük, ez 2^{k-1} diszjunkt, azonos hosszúságú zárt intervallum úniója, és mindegyiknek a közepéből kivágunk egy-egy 4^{-k} hosszú nyílt szakaszt. Mutassuk meg az eljárás eredményéről, a $D = \bigcap_{i=1}^{\infty} D_i$ halmazról, hogy kontinuum számosságú, belseje üres (ezekben a tulajdonságokban hasonlít a Cantor halmazhoz), viszont *Lebesgue mértéke pozitív.*

b) •• Tekintsük a $[0, 1]$ intervallumból a racionális számokat, ezek megszámlálható sokan vannak, legyen $q_1, q_2 \ldots$ egy felsorolásuk. Legyen továbbá ε egy tetszőlegesen kicsi pozitív szám, és $G_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{\infty} (q_i - \varepsilon 2^{-i}, q_i + \varepsilon 2^{-i})$, vagyis vesszük a racionális számok egyre kisebb sugarú környezeteinek únióját. Legyen továbbá $F_\varepsilon = [0, 1] \setminus G_\varepsilon$. Mutassuk meg, hogy egyrészt $\mu(F_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$ (itt μ a Lebesgue mérték), másrészt viszont F_ε *seholsem sűrű.* Ez alatt azt értjük, hogy nincs egyetlen olyan $(a, b) \subset [0, 1]$ intervallum sem, amelyben F_ε sűrű lenne, vagyis amelynek minden pontját elő lehetne állítani F_ε-beli számok sorozatának határértékeként.

HF 4.3••• Vizsgáljuk meg az alábbi $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ és $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ függvénysorozatokat a pontonkénti határértékük és az integráljaik határértéke szempontjából. Van-e olyan $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, illetve $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ integrálható függvény, hogy $f_n(x) \to f(x)$, illetve $g_n(x) \to g(x)$ Lebesgue majdnem minden $x \in [0, 1]$-re? Mennyi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int\limits_0^1 f_n(x)dx \right)$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\int\limits_0^1 g_n(x)dx \right)$? Teljesülnek-e a dominált konvergencia tétel, a monoton konvergencia tétel, valamint a Fatou lemma feltételei? Ha igen, mit mondanak ki ezek a tételek a konkrét esetekben?

1.
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{ha } 0 \leq x < 1/n, \\ 2n - n^2 x & \text{ha } 1/n \leq x \leq 2/n, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

2. Írjuk fel n-t $n = 2^k + l$ alakban, ahol $k = 0, 1, 2 \ldots$ és $l = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$ (ez

minden n -re egyértelműen megtehető). Legyen ezek után

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } \frac{l}{2^k} \le x < \frac{l+1}{2^k}, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

HF 4.4•• Tekintsük a következő $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \quad 0 < x,\ 0 < y \text{ és } 0 \le x - y \le 1, \\ -1 & \text{ha} \quad 0 < x,\ 0 < y \text{ és } 0 < y - x \le 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Számoljuk ki $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx \right) dy$-t és $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \right) dx$-t. Mi a helyzet a Fubini tétellel?

5. HF: (Beadási határidő: 2011.10.14.)

HF 5.1•••• Keressük meg azt az $u = u(t, x, y)$ valós-értékű differenciálható függvényt, ami eleget tesz a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + xy$$

parciális differenciálegyenletnek és a

$$u(0, x, y) = \sin(x^2 + 2y^2)$$

peremfeltételnek.

HF 5.2•••• **Reprezentációs formula.** Mutassuk meg, hogy ha az $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (a teljes téren értelmezett) kétszer folytonosan differenciálható *korlátos* függvény eleget tesz a

$$-\Delta u = f$$

Poisson-egyenletnek, ahol $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható és *kompakt tartójú*, és $n \ge 3$, akkor biztosan

$$u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y) f(y) dy + C$$

alakú valamilyen $C \in \mathbb{R}$-rel – ahol Φ az n-dimenziós Laplace-egyenlet alapmegoldása.
Segítség:

* Előadáson nem volt időm elmondani, de jó, ha tudjátok: *Liouville tétele szerint ha egy függvény a teljes $\mathbb{R}^n$-en harmonikus és még korlátos is, akkor konstans.*
* Azt már tudjuk, hogy a fenti képlettel adott függvények megoldások. Honnan is?
* Kompakt halmazon folytonos függvény korlátos.
* $n \ge 3$-ra Φ a végtelenben lecseng.
* Két tetszőleges korlátos megoldás különbségére alkalmazzuk a Liouville tételt!

HF 5.3•••• **Középérték-tulajdonság megfordítása.** Mutassuk meg, hogy ha $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $u : U \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható és u értéke bármely U-beli gömb középpontjában megegyezik a gömbfelületen felvett értékek átlagával (vagyis $u(x) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int_{\partial B(x,r)} u\, dS$), akkor u harmonikus.
Segítség:

* Tegyük fel indirekte, hogy nem, vagyis Δu valahol nem nulla – hanem mondjuk pozitív.

* Ekkor a folytonosság miatt Δu pozitív egy egész gömbön.
* Nézzük ezzel a gömbbel az „eredeti” középérték-tulajdonság bizonyításában szereplő

$$\phi(r) = \frac{1}{|\partial B(x,r)|} \int\limits_{\partial B(x,r)} u \, dS$$

függvényt.
* Ennek a deriváltját kiszámoltuk az előadáson. Keressünk ellentmondást.

6. HF: (Beadási határidő: 2011.10.28.)

HF 6.1•• Azon $w : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvények közül, amikre $w(0) = 0$ és $w(\pi) = \pi$, melyikre lesz az

$$I(w) = \int\limits_0^\pi \frac{1}{2}[w'(x)]^2 - w(x)\sin x \, dx$$

integrál minimális?

HF 6.2••• Jelölje U a síkon az egységkör*lap*ot. Az

$$I(w) = \iint\limits_U |\nabla w|^2$$

integrál melyik w kétszer folytonosan differenciálható függvényre minimális azok közül, amikre a kör*vonal*on teljesül, hogy $w(x,y) = xy$?

HF 6.3••• Legyen $u(x,t)$ megoldása az

$$u_t - \Delta u = 0$$

egyenletnek $\mathbb{R}^2 \times (0,\infty)$-n az

$$u(x,0) = g(x)$$

kezdeti feltétellel, ahol $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sima és *kompakt tartójú*. Mutassuk meg, hogy van olyan $C < \infty$ konstans, amire

$$|u(x,t)| \le C/t \quad \text{minden } x \in \mathbb{R}^2,\ 0 < t \in \mathbb{R}\text{-re.}$$

HF 6.4•••• **Hullámterjedés sebességének végessége.** Bizonyítsuk be energia-módszerrel a következő tételt:
Tegyük fel, hogy $u(x,t)$ megoldása az $u_{tt} - \Delta u$ hullámegyenletnek a teljes $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$-n. Rögzítsük $x_0 \in \mathbb{R}^n$-t és $0 < t_0 \in \mathbb{R}$-t és tegyük fel, hogy $u(x,0)$ és $u_t(x,0)$ is nulla $B(x_0,t_0)$-n (vagyis az x_0 középpontú, t_0 sugarú ($\mathbb{R}^n$-beli) gömbön). Ekkor $u(x,t)$ nulla a teljes

$$C = \{(x,t) \,|\, 0 \le t \le t_0, |x - x_0| \le t_0 - t\}$$

($\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$-beli) kúpon.
Útmutatás: Jelöljük $0 \le t \le t_0$-ra $e(t)$-vel a t-kor a „kúpban” lévő energiát, vagyis

$$e(t) := \frac{1}{2} \int\limits_{B(x_0,t_0-t)} u_t^2(x,t) + |\nabla u(x,t)|^2 \, dx.$$

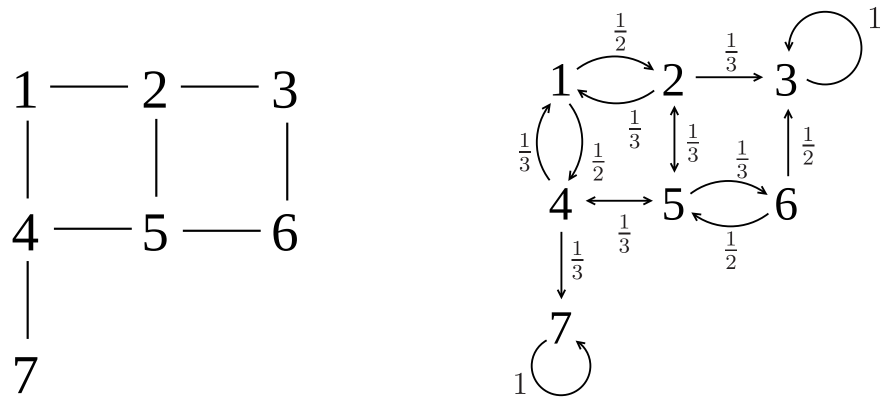
Ezen $e(t)$ deriválásával mutassuk meg, hogy nem nőhet.

* Vigyázat: az integrálási tartomány időfüggő – erre a deriválásnál figyelni kell.

* A deriválás után megjelenik egy $\int_B \nabla u \nabla v$ jellegű tag. Erre alkalmazzunk egy parciális integrálást (Green-formulát), hogy megjelenjen a Δu, és ki tudjuk használni, hogy u megoldja a hullámegyenletet.
* Az egyik $\int_{\partial B} \underline{a}\,\underline{b}$ típusú peremtag becslésére használjuk, hogy $\underline{a}\,\underline{b} \leq |\underline{a}|\,|\underline{b}| \leq \frac{1}{2}(\underline{a}^2 + \underline{b}^2)$.

7. HF: (Beadási határidő: 2011.11.04.)

HF 7.1 a.) •• Tekintsük az 1(a) ábrán látható gráfon az egyszerű szimmetrikus bolyongást, vagyis azt a Markov-láncot, amelynek állapotai a gráf csúcsai, és minden pillanatban egy szomszédos csúcsra ugrik át, egyenletesen választva a szomszédok közül. Keressük meg ennek a stacionárius eloszlását (csak egy van). Ha kell, az egyenlet-megoldáshoz kérjük számítógép segítségét (nem feltétlen kell). Mit lehet észrevenni a stacionárius eloszlás és a fokszámok kapcsolatáról?



(a) szimmetrikusan (b) elnyelő állapotokkal

1. ábra. bolyongás egy 7-csúcsú gráfon

b.) •• Tekintsük az előbbi bolyongásnak azt a módosítását, amikor a 3-as és 7-es állapotokat „elnyelővé tesszük”, vagyis a rendszer ezekbe eljutva ott is marad. Ezt szemléltei az 1(b) ábra – a nyilakon az átmenet-valószínűségekkel. Ennek mik a stacionárius eloszlásai? Hány van?

HF 7.2 a.) ••• Bizonyítsuk be, hogy Markov láncokban a rekurrencia és a tranziencia osztálytulajdonság: ha i és j egy (véges vagy megszámlálható állapotterű, diszkrét idejű, homogén) Markov lánc állapotai, amikre $i \leftrightarrow j$ és i rekurrens, akkor j is rekurrens.

b.) •• Tekintsünk egy diszkrét idejű Markov láncot a véges vagy megszámlálható S állapottéren. Legyen $\underline{\pi} = \{\pi_k\}_{k \in S}$ egy stacionárius eloszlás. Bizonyítsuk be, hogy π eltűnése osztálytulajdonság, vagyis ha az $i, j \in S$ állapotokra $i \leftrightarrow j$ és $\pi_i = 0$, akkor $\pi_j = 0$.

HF 7.3 a.) ••• Órán láttuk, hogy *véges állapotterű* (diszkrét idejű, homogén) Markov láncnak mindig van stacionárius eloszlása. Ezzel szemben tekintsük most az egyszerű szimmetrikus bolyongást az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán. Ennek egylépéses átmenet-valószínűségei

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{ha } j = i-1 \text{ vagy } j = i+1 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases} .$$

Mutassuk meg, hogy ennek nincs stacionárius eloszlása, vagyis nincs olyan $\underline{\pi} = \{\pi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ *valószínűségi* vektor, amire $\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i P_{ij}$.

b.) •• **bónusz:** Tekintsük egy egyszerű *aszimmetrikus* bolyongást az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán. Ennek egylépéses átmenet-valószínűségei

$$P_{ij} = \begin{cases} p, & \text{ha } j = i+1 \\ q, & \text{ha } j = i-1 \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases},$$

ahol $p \gneqq q > 0$ és $p + q = 1$. Mutassuk meg, hogy minden állapot tranziens.

8. HF: (Beadási határidő: 2011.11.11.)

HF 8.1 ••• Tekintsük újra az 1(b) ábrán látható bolyongást, ahol a 3-as és a 7-es állapot elnyelő. Jelöljük a folyamatot X_n-nel, és jelölje τ azt a véletlen időt, amikor a rendszer (először) bekerül az egyik elnyelő állapotba:

$$\tau := \min\{n \mid X_n = 3 \text{ vagy } X_n = 7\}.$$

(Persze ha $X_0 = 3$ vagy $X_0 = 7$, akkor $\tau = 0$.)
Számoljuk ki az $\mathbb{E}(\tau \mid X_0 = 1)$ feltételes várható értéket! (Segítség: számoljuk egyúttal az összes többi $\mathbb{E}(\tau \mid X_0 = i)$-t is, és használjuk a teljes várható érték tételt az első lépés szerint.)

HF 8.2 Egy lépcsőházban három lámpa van. Mindegyikben van 1-1 villanykörte, ami folyamatosan ég - hacsak nincs kiégve. Minden körte élettartama a többitől független exponenciális eloszlású val.változó 1 hónap várható értékkel. Van egy karbantartó, aki minden mástól független, azonos eloszlású exponenciális időközönként arra jár – átlag havonta egyszer, és amikor ott van, kicseréli az összes kiégett körtét. Jelölje $X(t)$ a t időpontban működő körték számát.

a.) • $X(t)$ folytonos idejű Markov lánc. Miért? Mi az állapottér?

b.) • Feltéve, hogy $t = 0$-kor pont 2 körte világít, mi a valószínűsége, hogy egy *rövid* h idő múlva már csak 1? (Érdemes észnél lenni!)

c.) • Írjuk fel $X(t)$ infinitezimális generátorát.

d.) • Keressük meg a stacionárius eloszlást.

e.) • Ez a stacionárius eloszlás egyensúlyi? Más szóval, teljesül a részletes egyensúly?

f.) • Sok év alatt az idő hány százalékában van töksötét (vagyis az összes égő kiégve)?

HF 8.3 ••• Jancsi és Juliska együtt laknak. Jancsi a hideget szereti, Julsika pedig a meleget. Mindkettejüknek 1-1 független Poisson-folyamat szerinti időpontokban, átlagosan óránként jut eszébe megnézni a termosztátot: ilyenkor Juliska felcsavarja a fűtést maximumra, Jancsi pedig lecsavarja minimumra. Tegyük fel, hogy délben a fűtés éppen maximumon volt. Mi a valószínűsége, hogy délután egy órakor is maximumon van?