Sztochasztikus folyamatok
0. feladatsor
Elérési idők, elérési valószínűségek

0.1 Tekintsük az origóból indított egyszerű, szimmetrikus bolyongást. Legyenek a és b pozitív egészek. Az origótól bal felé b lépésnyire van egy gödör és jobb fele a lépésnyire van egy másik gödör. A bolyongó előbb-utóbb bele fog esni valamelyik gödörbe.

(a) Mekkora valószínűséggel fog a bal szélső gödörbe esni a bolyongó?

(b) Várhatóan hány lépést tesz a bolyongó, amíg gödörbe esik?

0.2 Az egyszerű, aszimetrikus bolyongás olyan, hogy a bolyongó p valószínűséggel jobbra lép egyet, $1-p$ valószínűséggel pedig balra lép egyet. A bolyongást az origóból indítjuk. Tegyük fel, hogy $p > \frac{1}{2}$. Jelölje $a > 0$, $b > 0$ pozitív egészekre $\mathbf{P}_{a,b}$ annak a valószínűséget, hogy a bolyongó előbb éri el az a koordinátájú pontot a $-b$ koordinátájú pontnál.

(a) Számítsa ki $\mathbf{P}_{a,b}$ értékét.

(b) Milyen esemény valószínűségét adja meg $\mathbf{P}_{\infty,b} := \lim_{a\to\infty} \mathbf{P}_{a,b}$? Segítség: Használja a monoton osztálytételt!

(c) Milyen gyors a $\mathbf{P}_{\infty,b}$ lecsengése? Számolja ki $\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b} \log(\mathbf{P}_{\infty,b})$ értékét!

0.3 Egy szabályos érmét dobálok. Várhatóan hányszor kell feldobnom az érmét, hogy FFF-et lássak? És hogy FIF-et lássak?

Segítség: érdemes egy nyolc állapotú állapotteret felrajzolni. (A harmadik érmedobás után van csak értelme állapotokról beszélni)

0.4 Egy bűvésznek van három cilindere és két nyula. Eredetileg az első kalapban van mindkét nyúl. A bűvész időnként belenyúl egy egyenletesen választott kalapba, és ha ott van nyúl, akkor megragadja (az egyiket), és átteszi a másik két kalap valamelyikébe (ismét egyenletesen választ). Mekkora valószínűséggel éri el előbb azt az állapotot, amikor a második kalapban két nyúl van, mint azt, amikor a második és harmadik kalapban egy-egy nyúl van? Szabad Maple-t vagy Mathematica-t használni a megoldáshoz (de a megoldandó egyenletredszer mátrixos alakját le kell írni).

0.5 Tekintsünk egy egyszerű bolyongást azon a gráfon aminek a csúcsai A, B, C, D, E és élei: $AB, AC, BC, CD, BD, BE, DE$

(a) Tegyük fel, hogy a bolyongó az A csúcsból indul. Mennyi az C csúcs első eléréséig megtett lépések számának várható értéke?

(b) Tegyük fel, hogy a bolyongó az C csúcsból indul. Mennyi az első visszatérésig megtett lépések számának várható értéke?

(c) Tegyük fel, hogy a bolyongó az A csúcsból indul. Várhatóan hányszor jár E-ben mielőtt először elérné az C csúcsot?

(d) Tegyük fel, hogy a bolyongó az B csúcsból indul. Mennyi annak a valószínűsége, hogy előbb éri el az A csúcsot, mint a C csúcsot?

0.6 Legyenek $X_1, X_2, \dots$ egymásutáni kockadobások számszerű eredményei és $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Legyen

$$T_1 = \min\{n \geq 1 : S_n \text{ osztható 7-tel}\},$$
$$T_2 = \min\{n \geq 1 : S_n - 1 \text{ osztható 7-tel}\}.$$

Számoljuk ki $\mathbf{E}(T_1)$-et és $\mathbf{E}(T_2)$-t.

0.7 Legyenek $A, \eta, \phi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy ϕ független az (A, η) pártól és egyenletes eloszlású a $[0, 2\pi]$ intervallumban. Bizonyítandó, hogy az $X_t = A\cos(\eta t + \phi)$ sztochasztikus folyamat stacionárius.