Félévi időbeosztás (nagyjából) **házi feladat beadási határidőkkel** (pontosan)
Valószínűségszámítás 2. matematikusoknak és fizikusoknak, 2011 tavasz

Dátum	Téma	beadandó
Feb 10Cs	Konvolúció (normális, Cauchy, exponenciális)	
Feb 16Sze / 17Cs	↑ *gyakorlat* ↑	
Feb 24Cs	Konvolúció; gen. fv-ek, elágazó folyamatok, bolyongások	**1. HF**
Már 2Sze / 3Cs	↑ *gyakorlat* ↑	
Már 10Cs	Gen. fv-ek, elágazó folyamatok, bolyongások	**2. HF**
Már 16Sze / 17Cs	↑ *gyakorlat* ↑	
Már 24Cs Már 25P	Véges Markov láncok: alapfogalmak **1. ZH 14:15-kor, F2E**	**3. HF**
Már 30Sze / 31Cs	↑ *gyakorlat* ↑	
Ápr 7Cs	Véges Markov láncok: stacionárius eloszlás; végtelen Markov láncok	**4. HF**
Ápr 13Sze / 14Cs	↑ *gyakorlat* ↑	
Ápr 21Cs	Végtelen Markov láncok: rekurrencia-tranziencia	**5. HF**
Ápr 27Sze / 28Cs	↑ *gyakorlat* ↑	
Máj 5Cs Máj 6P	Poisson folyamat tulajdonságai, folytonos idejű Markov-ugrófolyamatok **2. ZH 14:15-kor, F2E**	**6. HF**
Máj 11Sze / 12Cs Máj 13P	↑ *gyakorlat* ↑ PótZH 16:15-kor, KM65	

A házi feladatok jelen file-ban kerülnek kitűzésre, és előadás kezdetekor (páratlan hét csütörtökök 8:30) beadandók. Minden feladat számít, és annyi pontot ér, ahány • van mellette. Az 1. ZH anyaga az első három előadás és gyakorlat, a 2. ZH anyaga az első hat, főképpen 4., 5. és 6. előadás és gyakorlat.

1.HF: (Beadandó: február 24.)

HF 1.1••• Móricka matematikushallgató a BME-n, Valószínűségszámítás 1. gyakorlatból próbál átmenni. Ha nem sikerül neki az egyik félévben, akkor a következő félévben újra próbálkozik. Az egymást követő félévek próbálkozásainak kimenetele független, és minden félévben $\frac{2}{3}$ valószínűséggel bukik meg. Ha az aláírást megszerezte, még ugyanabban a félévben próbálkozik az elméleti vizsgával. Ha ez nem sikerül, akkor a következő félévben újra próbálkozik az elméleti vizsgával, egészen addig, amíg át nem megy ezen is. Az egyes félévekben elméletből $\frac{1}{4}$ valószínűséggel megy át. Határozzuk meg Móricka Valószínűségszámítás 1.-el töltött félévei számának az eloszlását!

HF 1.2•• Bizonyítsuk be, hogy ha X és Y független standard normális eloszlású valószínűségi változók, valamint a és b valós számok, akkor $U = aX + bY$ és $V = bX - aY$ valószínűségi változók is függetlenek. Részletesen indokoljunk! Milyen eloszlású lesz U és V?

HF 1.3••• Legyen X és Y független Exp(λ), illetve Exp(μ) eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg $Z := X + Y$ sűrűségfüggvényét. Mi történik a $\lambda \to \mu$ határátmenetben?

HF 1.4••• Legyen X és Y független, Poi(λ), illetve E$(0,\,1)$ eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg a $Z := X + Y$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét.

HF 1.5••• Legyenek X és Y független azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek közös sűrűségfüggvénye $f(x) = 3x^2 \cdot \mathbf{1}\{x \in [0,\,1]\}$. Határozzuk meg az $U := X + Y$ és a $V := X - Y$ valószínűségi változók (marginális) sűrűségfüggvényét.

HF 1.6••• Legyenek $X_1,\, X_2,\, \dots$ független, azonos eloszlású valószínűségi változók, melyeknek sűrűségfüggvénye xe^{-x}, ha $x \geq 0$, és 0 egyébként. Legyen továbbá $S_0 = 0$ és $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, valamint legyen $N(t) = \max\{n : S_n < t\}$.

a) Adjuk meg S_2 sűrűségfüggvényét.

b) Határozzuk meg $N(t)$ eloszlását, azaz $k = 0, 1, 2, \dots$-ra $\mathbf{P}\{N(t) = k\}$ értékét! (Számolás nélkül is megy, ha jól megértettük miről van szó.)

HF 1.7••• Legyen X egyenletes a $\{0,\, 1,\, \dots,\, n-1\}$ halmazon. Bizonyítsuk be, hogy ha n nem prím, akkor X eloszlása előáll, mint két egészértékű eloszlás konvolúciója.

2.HF: (Beadandó: március 10.)

HF 2.1••• Legyen X egy $\mathbb{N}$-értékű valószínűségi változó. Jelöljük eloszlásának generátorfüggvényét $P(z)$-vel. Írjuk fel az $a_n := \mathbf{P}\{X > n\}$, $\quad b_n := \mathbf{P}\{X < n + 2\}$ és $c_n := \mathbf{P}\{X = 3n\}$ számsorozatok generátorfüggvényeit. (Figyelem: ezek nem eloszlások.)

HF 2.2••• Legyen $A_0,\ A_1,\ \dots A_n$ egy $(n+1)$-szögű konvex poligon a síkban. Legyen $a_1 = 1$, és $n \ge 2$ esetén jelölje a_n azt a számot, ahányféle különböző módon ezt a poligont $(n-1)$ háromszögre tudjuk bontani, $(n-2)$ egymást át nem metsző átló berajzolásával. Bizonyítsuk be, hogy $n \ge 2$ esetén fennáll a következő azonosság:

$$a_n = a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \dots + a_{n-1} a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}.$$

A fenti azonosság alapján határozzuk meg az a_n sorozat generátorfüggvényét.

Bónusz:• Az előbbi generátorfüggvény segítségével adjunk explicit kifejezést a_n-re.

HF 2.3••• Legyenek $X_1,\ X_2,\ \dots$ független (optimista, azaz a siker sorszámát tekintjük) Geom(p_1) eloszlású valószínűségi változók, és ν egy tőlük független, (szintén optimista) Geom(p_2) eloszlású valószínűségi változó. Lássuk be generátorfüggvény-módszerrel, hogy

$$\sum_{i=1}^{\nu} X_i \sim \text{Geom}(p_1 p_2).$$

Adjunk valószínűségszámítási értelmet is a kapott formulának.

HF 2.4•••• Egy utca autóforgalmát úgy modellezzük, hogy

a) az időskálát fix és oszthatatlan egy másodpercnyi időegységekre osztjuk,

b) feltesszük, hogy $p \in (0,\ 1)$ annak a valószínűsége, hogy az egyes időintervallumokban elhalad az utcán egy autó,

c) továbbá azt is feltesszük, hogy az egyes időegységekben történő események egymástól függetlenek.

Egy gyalogos akkor tud átmenni az utca túloldalára, ha legalább három másodpercig forgalommentes az utca. (Feltesszük, hogy az utca belátható: a gyalogos el tudja dönteni, hogy a következő három másodpercben lesz-e forgalom.) Határozzuk meg a gyalogos várakozási idejének generátorfüggvényét! *Segítség: alkalmazzuk a teljes várhatóérték tételét (avagy toronyszabályt) arra vonatkozóan, hogy az első kocsi mikor érkezik!*

HF 2.5•••• Egy majom egymás után függetlenül, egyenlő valószínűséggel üti le az (angol) írógép 26 betűjének mindegyikét (számot és írásjelet nem üt, ennyire van intelligens). Legyen ν az a szám, ahányadik leütésre először megjelenik az a szó, hogy ”BAB”. Határozzuk meg ν generátorfüggvényét és várható értékét.

HF 2.6••• Móricka rendszeresen gyorshajt, így a rendőr rendszeresen megállítja. Ilyenkor az esetek felében (mindentől függetlenül) 10 000 Ft a bírság, felében pedig 50 000 Ft. Ráadásul Móricka ezeket a helyzeteket meglehetősen rosszul kezeli, és nagy szája következményeként minden rendőri intézkedés (függetlenül) p valószínűséggel azzal is jár, hogy bevonják a jogosítványát. Határozzuk meg a Móricka által összesen kifizetett büntetés generátorfüggvényét, várható értékét és szórásnégyzetét.

3.HF: (Beadandó: március 24)

HF 3.1••• Jelölje $\theta(p)$ annak a valószínűségét, hogy soha nem pusztul ki egy olyan elágazó folyamat, amelyben az utódok eloszlása Pesszimista Geom(p). Rajzoljuk fel a $p \mapsto \theta(p)$ függvény grafikonját.

HF 3.2••• Egy elágazó folyamatban $m = \mathbf{E}Z_{1,1}$ (várható utódszám) és $\sigma = \mathbf{D}Z_{1,1}$ (utódszám szórása) segítségével fejezzük ki az n. generáció egyedszámának $\mathbf{D}^2 Z_n$ szórását.

HF 3.3••• Egy elágazó folyamatban $N := \sum_{n=0}^{\infty} Z_n$ jelöli a valaha élt összes egyed számát.

a) Írjunk fel egy rekurziót N generátorfüggvényére.

b) Oldjuk meg a rekurziót ha az utódszám eloszlása Bernoulli(p).

c) Oldjuk meg a rekurziót ha az utódszám eloszlása Pesszimista Geom(p).

d) Határozzuk meg N várható értékét mindkét esetben.

HF 3.4••• Egy elágazó folyamatban az utódszám generátorfüggvénye $P(s) = q + ps^2$, ahol $0 < p = 1 - q < 1$. Legyen τ a kihalás ideje: $\tau = \inf\{n\ :\ Z_n = 0\}$.

a) Határozzuk meg a kihalás valószínűségét: $\mathbf{P}\{\tau < \infty\}$.

b) Határozzuk meg a $\mathbf{P}\{\tau > n\}$ valószínűséget.

HF 3.5•••• Legyenek $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \dots$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók, $\mathbf{P}\{\zeta_i = \pm 1\} = \frac{1}{2}$. Legyen $S_n = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i$ egyszerű, szimmetrikus bolyongás $\mathbb{Z}$-n. Legyen $\tau = \min\{n \,|\, S_n = 1\}$ az első szint elérési ideje. Határozzuk meg $\mathbf{P}\{\tau = k\}$ értékét!

$$\lim_{k\to\infty} k^{\frac{3}{2}} \cdot \mathbf{P}\{\tau = k\} = ?$$

HF 3.6•••• Tekintsük $\mathbb{Z}$ helyett a (végtelen) $\mathbb{G}_g$, g-ed fokú homogén fát mint alapgráfot és rajta a szimmetrikus bolyongást. Azaz: S_n egy véletlen bolyongás $\mathbb{G}_g$-n, amely egy megjelölt csúcsról (origóról) indul és időegységenként lép az aktuális hely g szomszédja közül egyet egyenletes g^{-1} valószínűséggel választva. Számoljuk ki a Φ, F, L generátorfüggvényeket. ($\Phi(z)$: egy kijelölt első szomszéd elérési idejének generátorfüggvénye, $F(z)$: origóba való első viszatérés idejének generátorfüggvénye; $L(z)$: origóba való utolsó látogatás idejének generátorfüggvénye.)

4.HF: (Beadandó: április 7)

HF 4.1••• Mutassuk meg, hogy ha X_n egy Markov lánc, akkor minden $n \geq 1$-re és az állapottér minden $A_0, \ldots, A_{n-1}$ részhalmazaira

$$\mathbf{P}\{X_{n+1} = j \mid X_0 \in A_0, \ldots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n = i\} = P_{ij}.$$

Adjunk viszont ellenpéldát, ami azt mutatja, hogy

$$\mathbf{P}\{X_{n+1} = j \mid X_0 \in A_0, \ldots, X_{n-1} \in A_{n-1}, X_n \in A_n\} \neq \mathbf{P}\{X_{n+1} = j \mid X_n \in A_n\}.$$

HF 4.2•••• A ξ_t, $t = 1, 2, \ldots$ valószínűségi változók legyenek függetlenek és azonos $\mathbf{P}\{\xi_t = 1\} = p = 1-\mathbf{P}\{\xi_t = -1\}$ eloszlásúak. Vizsgáljuk meg, hogy Markov láncot alkotnak-e a következő valószínűségi változó sorozatok:

a) $X_t := \xi_t\xi_{t+1}$ (beugratós kérdés!);

b) $Y_t := \xi_1\xi_2\ldots\xi_t$;

c) $Z_t := \Phi(\xi_t, \xi_{t+1})$, ahol $\Phi(-1, -1) = 1$, $\Phi(-1, 1) = 2$, $\Phi(1, -1) = 3$, $\Phi(1, 1) = 4$.

A Markov láncokra számítsuk ki az egy lépéses átmenetvalószínűség-mátrixokat.

HF 4.3••• Egy hamis érmedobás-sorozat n idejében az állapot ”1”, ha az $n-1$. és az n. dobás is F. Hasonlóan, az állapot ”2”, ”3”, ”4”, ha az $n-1$. és az n. dobások FI, IF, II. Határozzuk meg a P átmenetvalószínűség mátrixot, és összes hatványát (P^2, $P^3 \ldots$).

HF 4.4••• Legyen Z_n egy szabályos kockadobás-sorozat, és

$$X_n = \max\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_n\}.$$

a) Mutassuk meg, hogy X_n egy Markov lánc, és adjuk meg az átmenetvalószínűség mátrixát.

b) A láncot vizsgálva írjuk fel az átmenetvalószínűség mátrix magasabb hatványait is.

HF 4.5•••• Egy épület égői minden másodpercben, egymástól és addigi élettartamuktól függetlenül q valószínűséggel kiégnek. Az épületben m ilyen független égő található, melyek kezdetben mind működnek. Legyen Y_n az n. másodperc végén még működő égők száma.

a) Mutassuk meg, hogy Y_n Markov lánc, és határozzuk meg az átmenetvalószínűség mátrixát.

b) Határozzuk meg a

$$\phi_n(s) = \mathbf{E}s^{Y_n}$$

generátorfüggvényt. (*Tipp: mutassuk meg, hogy $\phi_n(s) = \phi_{n-1}(q + ps)$. Ennek ezúttal van szép zárt alakja. Sőt, nem csak szép és zárt, de nevezetes is!*)

c) A generátorfüggvény segítségével számítsuk ki $\mathbf{P}\{Y_n = 0\}$-t és $\mathbf{E}Y_n$-t.

HF 4.6••• Kovácsék naponta olvassák az újságot, majd a szoba sarkában lévő újságkupac tetejére teszik a kiolvasott példányt. Esténként 1/3 valószínűséggel valamelyik családtag fogja a teljes újságkupacot és kidobja a szemétbe. Valahányszor öt újság gyűlik fel a kupacban, Kovács úr fogja magát és kidobja a kupacot (1 valószínűséggel). Tekintsük esténként (tehát az esetleges selejtezés után) a kupacban lévő újságok számát.

a) Ésszerű-e Markov lánccal modellezni a folyamatot? Ha igen, azonosítsuk a Markov lánc állapotterét és írjuk fel az átmenetvalószínűségek mátrixát.

b) Vasárnap este üres volt az újságkupac. Mekkora valószínűséggel lesz csütörtök este pontosan egy újság a kupacban? Számítsuk ki esetszétválasztással és mátrixhatványozással is.

5.HF: (Beadandó: április 21)

HF 5.1••• Osztályozzuk az alábbi Markov láncok állapotait, és határozzuk meg a rekurrens állapotok periódusát:

a)

$$S = \{1, 2, 3\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

$$S = \{1,\, 2,\, 3,\, 4\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$S = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

d)

$$S = \{1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5,\, 6\}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

HF 5.2••• A Médiarendőrség a TV nézéssel kapcsolatban a következő állapotokat figyelte meg: 0 (sosem néz TV-t), 1 (csak közszolgálati műsorokat néz), 2 (gyakran TV-zik), 3 (függő), 4 (viselkedési zavarok figyelhetők meg), 5 (agyhalott). Ezen állapotok közti átmeneteket egy Markov lánccal lehet modellezni, melynek átmenetmátrixa

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) 1-es állapotból indulva, mi a valószínűsége, hogy az 5-ös állapot előbb bekövetkezik, mint a 0-s, azaz, hogy egy közszolgálati műsorokat néző agyhalottként végzi?

b) Várhatóan mennyi ideig tart amíg egy közszolgálati műsorokat néző leszokik a TV-zésről, vagy pedig eléri az agyhalott állapotot?

HF 5.3••• Egy majom egymás után függetlenül, egyenlő valószínűséggel üti le az (angol) írógép 26 betűjének mindegyikét (számot és írásjelet nem üt, ennyire van intelligens). Legyen ν az a szám, ahányadik leütésre először megjelenik az a szó, hogy ”BAB”. Írjunk fel egy Markov láncot, ami azt jellemzi, hogy halad a majom a BAB szóval. Ennek segítségével határozzuk meg ν várható értékét.

HF 5.4•••• A városban két bár van. A fiú és a lány ugyanaznap költöztek a városba. A fiú első este az 1. bárba megy, majd minden este valamelyik bárt meglátogatja, a

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

átmenetvalószínűség mátrixú Markov lánc szerint váltogatva. A lány a 2. bárban kezd, és a fiútól függetlenül minden este valamelyik bárt meglátogatja a

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

átmenetvalószínűség mátrixú Markov lánc szerint váltogatva. Természetesen a dolognak akkor lesz vége, amikor találkoznak, tehát először mennek ugyanabba a bárba.

a) Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy az n. este a fiú az 1. bárba, a lány pedig a 2. bárba megy.

b) Várhatóan hanyadik estén találkoznak?

c) Mi a valószínűsége, hogy az 1. bárban találkoznak?

d) Mi a találkozásuk idejének az eloszlása?

HF 5.5•••• Legyenek $X_1,\, X_2,\, X_3,\, \ldots$ független és azonos eloszlású, egész értékű valószínűségi változók, melyeknek van várható értékük és $\mathbf{E}\big(X_i\big) = 0$. Legyen $S_0 = 0$ és

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

(Azaz: S_n bolyongás $\mathbb{Z}$-n, melynek egymás utáni lépései $X_1,\ X_2,\ \ldots$.) Legyen továbbá

$$G_n(x) := \mathbf{E}\Big(\sum_{j=0}^{n} \mathbf{1}_{\{S_j=x\}}\Big),$$

a $[0,\ n]$ időintervallumban az x rácsponton töltött részidő várható értéke. (E függvényt a bolyongás Green-függvényének nevezzük.)

a) Bizonyítsuk be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és $x \in \mathbb{Z}$ esetén

$$G_n(0) \geq G_n(x).$$

Útmutatás: Tekintsük az x rácspont első elérésének idejét.

b) Emlékezzünk a Nagy Számok Gyenge Törvényére: bármely $\varepsilon > 0$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(|S_n| < \varepsilon n\Big) = 1.$$

Ennek segítségével bizonyítsuk be, hogy rögzített $\varepsilon > 0$ mellett

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{|x|<\varepsilon n} G_n(x) = 1.$$

c) Az (a) és (b) pontok eredményének felhasználásával bizonyítsuk be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} G_n(0) = \infty.$$

d) A fentiek alapján lássuk be, hogy az S_n Markov lánc rekurrens.

e) Alkalmazható-e a fenti okoskodás magasabb dimenziós bolyongásra?

HF 5.6••• A $P = (P_{i,j})_{i,j=1}^{N}$ sztochasztikus mátrixot *duplán sztochasztikusnak* vagy *bisztochasztikusnak* nevezzük, ha nem csak sorösszegei, hanem oszlopösszegei is egyenlőek 1-el. Legyen az X_t Markov lánc irreducibilis az $S = \{1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$ állapot-halmazon és átmenetvalószínűségeinek mátrixa bisztochasztikus. Mutassuk meg, hogy az X_t Markov lánc stacionárius eloszlása egyenletes az S halmazon, és fordítva: ha a stacionárius eloszlás egyenletes, akkor az átmenetmátrix bisztochasztikus.

6.HF: (Beadandó: május 5)

HF 6.1••• Kovácsék naponta olvassák az újságot, majd a szoba sarkában lévő újságkupac tetejére teszik a kiolvasott példányt. Esténként 1/3 valószínűséggel valamelyik családtag fogja a teljes újságkupacot és kidobja a szemétbe. Valahányszor öt újság gyűlik fel a kupacban, Kovács úr fogja magát és kidobja a kupacot (1 valószínűséggel). Tekintsük esténként (tehát az esetleges selejtezés után) a kupacban lévő újságok számát.

a) Hosszú idő után mennyi a kupacban lévő újságok számának várható értéke?

b) Tegyük fel, hogy kezdetben 0 újság van a kupacban. Várhatóan hány nap múlva lesz újból üres a kupac?

HF 6.2•••• (Ehrenfest urna modell.) Egy vizslán és egy labradoron összesen N bolha van. Minden időpillanatban egy véletlenül választott bolha átugrik az egyik kutyáról a másikra. Határozzuk meg a modell stacionárius eloszlását.

HF 6.3••• (Bernoulli-Laplace keverési modell) Két urnában szétosztunk N fehér és N feket golyót úgy, hogy mindegyik urnába N golyó kerüljön. Minden lépésben véletlenszerűen kiválasztunk egy-egy golyót mindkét urnából, és kicseréljük őket. Jelölje X_n az első urnában lévő fehér golyók számát az n. lépés után.

a) Mutassuk meg, hogy X_n Markov lánc, és írjuk fel az egylépéses átmenetvalószínűségek mátrixát.

b) Mutassuk meg, hogy az egyetlen stacionárius eloszlás

$$\pi(k) = \frac{\binom{N}{k}^2}{\binom{2N}{N}}.$$

HF 6.4••• **a)** Legyen G olyan irányítatlan véges gráf, ami esetleg tartalmaz hurokéleket és párhuzamos éleket. A bolyongó mindig egyenletesen választ az aktuális csúcsból kiinduló utak közül (tehát a hurokélek duplán számítanak). Mi a bolyongás stacionárius eloszlása?

b) A szokásos $\{(i, j) \,:\, 1 \le i, j \le 8\}$ 8×8-as sakktáblán egy huszár indul az $(1, 1)$ sarokból, és minden lépésében függetlenül, egyenlő eséllyel választ a lehetséges lépései közül. (Egy huszár az i, j pozícióról a $(i+2,\, j+1)$, $(i+1,\, j+2)$, $(i-1,\, j+2)$, $(i-2,\, j+1)$, $(i-2,\, j-1)$, $(i-1,\, j-2)$, $(i+1,\, j-2)$, $(i+2,\, j-1)$ pozíciók közül azokra léphet, melyek bent vannak a sakktáblában.) Határozzuk meg az $(1, 1)$ mezőre visszatérés első idejének várható értékét.

HF 6.5•••• Legyen $X_0 = 1$, és legyen P és R két különböző átmenetvalószínűség mátrix az $\{1, 2\}$ állapottéren. Feldobunk egy hamis pénzt, ha fej (ennek p a valószínűsége), akkor az X_1, X_2, $\ldots$ folyamatot a P mátrix valószínűségei szerint generáljuk, ha írás ($1 - p$ valószínűséggel), akkor a Q mátrixot használjuk.

a) Markov lánc-e $\{X_n\}$?

b) Tegyük fel, hogy P és Q mindketten aperiodikusak és irreducibilisek. Határozzuk meg $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{X_n = j\}$ értékét, $j = 1,\, 2$.

Most ugyanezzel az $X_0 = 1$ kezdőállapottal és P, Q mátrixokkal minden lépés előtt feldobjuk az érmét, hogy eldöntsük melyik mátrixot használjuk abban a lépésben.

c) Most Markov lánc-e $\{X_n\}$?

d) Mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}\{X_n = j\}$ nem feltétlenül ugyanaz, mint az előző esetben.

HF 6.6••• Legyen $\{X_n\}$ egy véges állapotterű Markov lánc. Számoljuk ki a

$$\mathbf{Cov}(X_n,\, X_{n+k})$$

mennyiséget az átmenetvalószínűségek és a $\mathbf{P}\{X_n = j\}$ mennyiségek segítségével. Mi a helyzet, ha a lánc stacionárius? Hogyan viselkedik $\mathbf{Cov}(X_n,\, X_{n+k})$ ebben az esetben, ahogy $k \to \infty$?

Bónusz:•••• Tekintsük a következő sorbanállási problémát: X_n a sorbanálló vásárlók száma n-kor. Minden $(n,\, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ időintervallumban $p \in (0,\, 1)$ valószínűséggel egy új vásárló érkezik és a sor végére áll. Ettől függetlenül, ugyanebben az időintervallumban a sor elején álló vásárlót $q \in (0,\, 1)$ valószínűséggel kiszolgálják és ő elhagyja a sort. Legfeljebb egy új vásárló érkezhet és legfeljebb egy vásárlót szolgálnak ki egységnyi időintervallumonként. A különböző időintervallumokban történő események egymástól függetlenek.

a) Indokoljuk, hogy az X_n folyamat Markov lánc. Írjuk le az állapotterét és átmenetmátrixát és állapítsuk meg, hogy irreducibilis-e, illetve, aperiodikus-e.

b) Mely $(p,\, q)$ paraméter értékekre lesz az X_n Markov lánc pozitív rekurrens, null rekurrens illetve tranziens?

c) A pozitív rekurrens esetben határozzuk meg a Markov lánc π stacionárius (invariáns) eloszlását. Mennyi a sor átlagos hossza a stacionárius állapotban?

d) A tranziens esetben határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy kezdetben j hosszú sorral indulva, valaha is kiürül a sor.

Bónusz:•••••• Alább három Markov lánc szóban és hozzá három eloszlás. Írjuk fel a Markov láncok állapottereit, átmenetvalószínűségeit, és igazoljuk, hogy a megfelelő eloszlások a stacionáriusak.

a) n, körben elhelyezett urnában k golyó közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és azt az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük, amennyiben az üres. Ha nem üres, akkor nem csinálunk semmit. **Fermi-Dirac eloszlás:** k golyót véletlenszerűen elosztunk $n \ge k$ urnába úgy, hogy mindegyik urnába legfeljebb egy kerülhet.

b) n, körben elhelyezett urnában k golyó közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és azt az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük. **Maxwell-Boltzmann eloszlás:** k megkülönböztethető golyót véletlenszerűen elosztunk n urnába.

c) n, körben elhelyezett urna közül minden másodpercben egyet véletlenszerűen kisorsolunk, és egy abban levő golyót – ha van – az óramutató irányába eső szomszéd urnába áthelyezzük. **Bose-Einstein eloszlás:** k megkülönböztethetetlen golyót véletlenszerűen elosztunk n urnába.