Valószínűségszámítás 1. ZH pótpótlása, 2007. december 19.

1. Móricka és Pistike egymás mellett ül az iskolában. Egyforma a táskájuk a széken és a füzetük a padon. Amikor kimennek szünetre, 10 vicces kedvű osztálytársuk jár a padjuknál. Minden vicces osztálytárs – a többiektől függetlenül – művel egy viccet: 1/2 valószínűséggel kicseréli a táskájukat, a maradék 1/2 valószínűséggel pedig a füzetüket. Mi a valószínűsége, hogy amikor szünetről visszatérnek, mindkettőjük füzete és táskája is a helyén van?

2. Móricka téli napokon az iskolába menet évek óta mindig megáll az utcasarkon, és hógolyóval addig dobálja a túloldali buszmegálló-táblát, amíg el nem találja. Egy átlagos téli héten (5 havas nap alatt) átlagosan 15 hógolyót dob el így. Mi a valószínűsége, hogy holnap reggel kevesebb mint 3 dobás elég lesz neki a találathoz? (Móricka falujában holnap reggel biztosan lesz hó. Tudjuk továbbá, hogy Móricka nem fejlődik: minden dobása a többitől függetlenül azonos valószínűséggel talál.)

3. A piripócsi kaszinóban a következő „joker” nevű játékot vezetik be. A játékos megteszi tétjét, majd a krupié hússzor egymás után megpörgeti a rulett-kereket. Ha a húsz egymás utáni pörgetésben mindhárom szín (piros, zöld és fekete) legalább egyszer előfordul, akkor a játékosnak kifizetik a feltett tét tízszeresét (amibe beleszámít a tét maga), egyébként a feltett pénzt viszi a bank. Érdemes-e jokert játszani? (A hagyományos rulett-kerék 37 mezőjéből 18 fekete, 18 piros és egyetlen zöld mező van, a 0.)

Valószínűségszámítás 2. ZH pótpótlása, 2007. december 19.

1. Legyen az (X, Y) valószínűségi vektorváltozó együttes sűrűségfüggvénye
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi^4}x^2, & \text{ha } -\pi < x, y < \pi \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$
Legyen továbbá $Z = X^2 \sin^2 Y + Xe^{-Y^2}$. Mennyi Z várható értéke?

2. Feldobunk egy szabályos dobókockát, majd az eredménytől függő eloszlással választunk egy véletlen számot a $[0;1]$ intervallumon – éspedig úgy, hogy ha a kockadobás eredménye k, akkor az alkalmazott eloszlás sűrűségfüggvénye
$$f(x) = \begin{cases} kx^{k-1}, & \text{ha } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{ha nem.} \end{cases}$$
   (a) Mennyi az így kapott szám várható értéke?
   (b) A kísérletet hatszor megismételjük egymástól függetlenül. Mi a valószínűsége, hogy mindannyiszor 1/2-nél kisebb számot kapunk?

3. Legyenek Φ és R független valószínűségi változók. Φ egyenletes eloszlású a $[0;2\pi]$ intervallumon, R sűrűségfüggvénye pedig
$$f(r) = \begin{cases} 2r, & \text{ha } 0 < r < 1 \\ 0, & \text{ha nem,} \end{cases}$$
ahol C alkalmas konstans. Legyen továbbá $X = R\cos\Phi$ és $Y = R\sin\Phi$. Mennyi X és Y kovarianciája?