

## Valószínűségszámítás 1. ZH pótlása, 2007. december 14.

1. Az asztalom mind a tíz fiókjában van ceruza, ezért ha ceruzára van szükségem, véletlenül (egyenletesen) választok egyet a tíz fiók közül. Tegnap 12-szer húztam ki ily módon valamelyik fiókot. Mi a valószínűsége, hogy a legfelső és a legalsó fiókot is legalább egyszer kihúztam?
2. Két látszólag egyforma pénzérme közül az egyik szabályos, a másik cinkelt. A cinkelésről annyit tudunk, hogy vagy a Fej, vagy az Írás valószínűsége  $1/2 - \varepsilon$ . Kiválasztjuk az egyiket, feldobjuk, majd ezt addig ismételjük, míg kétszer ugyanazt az eredményt nem kapjuk. Azt tapasztaljuk, hogy ehhez páros sok próbálkozásra volt szükség. Mi a valószínűsége, hogy a szabályos érmét választottuk?
3. Egy lassan bomló radioaktív mintában percenként átlagosan 1000 foton keletkezik mint bomlástermék. Minden foton a többitől függetlenül  $1/1000$  valószínűséggel találja el a detektorunkat. Egy kísérletet addig szeretnék folytatni, amíg legalább négy foton el nem találja a detektort. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább öt percig tart majd a kísérlet?
4. **javítóknak:** Karácsonyra elektromos lekvárkavarógépet szeretnék venni a Józsefvárosi piacon. A bazársoron, ahol megyek, 100 sátorban árulnak elektromos lekvárkavarógépet. Végig fogok menni a soron, és valahol meg fogom venni a gépet. Nagyon örülnék, ha a legolcsóbbat tudnám megvenni. Sajnos azonban a tömeg sodrása nagyon erős: ha egy áruson túlhaladtam, oda visszamenni már nem tudok. A karácsony közel van, a soron még egyszer végigmenni sem lesz már időm. Hogyan válasszam ki, hogy hol veszem a gépet? Mennyi a valószínűsége, hogy sikerül a legolcsóbbat megvennem?

## Valószínűségszámítás 2. ZH pótlása, 2007. december 14.

1. Az  $X$  nemnegatív egész értékű val. változó egy ketyere élettartamát adja meg, napokban. Tudjuk, hogy  $P(X = n) = C \frac{1}{n(n+1)}$ .
  - (a) Mennyi a  $C$  normáló konstans értéke? Mi a ketyere várható élettartama?
  - (b) Vegyünk a ketyeréből  $k$  egymástól függetlenül működő példányt. Jelöljük  $Y$ -nal azon napok számát, amíg mind a  $k$  ketyere működik. Mennyi  $Y$  várható értéke? (Az eredményt a  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  függvény segítségével tudjuk barátságos alakban megadni.)
2. Az  $x^2 + bx + c$  másodfokú egyenlet  $b$  és  $c$  együtthatóit válasszuk egymástól függetlenül egyenletes eloszlással a  $[-2, 2]$  intervallumból. Mi a valószínűsége, hogy az egyenletnek két valós gyöke lesz?
3. Az  $x^2 + 2x + c$  másodfokú egyenlet  $c$  együtthatóját válasszuk egyenletes eloszlással a  $[0, 1]$  intervallumból. Mi az egyenlet kisebbik gyökének várható értéke?
4. **javítóknak:** Legyen  $X$  és  $Y$  két független valószínűségi változó, mindkettő  $\lambda$  paraméterű exponenciális eloszlású. Legyen  $V = X + Y$  és  $Z = \frac{X}{X+Y}$ . Adjuk meg  $(V, Z)$  együttes eloszlását (mondjuk, az együttes sűrűségfüggvénnyel).