Egy síkbeli bolyongási modellről

Mogy

2010. október 21.

Előzetes megjegyzés

A feladat Horváth Lacitól származik. Az általa mondottakat egy kicsit átjelöltem. A megoldás lényegében való helyességéről meg vagyok győződve, de az elszámolás jogát fenntartom.

1. Bevezetés

1.1. A modell

Egy, a síkon bolyongó részecske a következő szabályok szerint mozog:

- az origóból indul,
- minden egész másodpercben lép egyet,
- a lépése mindig egy 1 hosszú vektor.
- A második lépéstől kezdve minden lépésének irányát úgy kapjuk, hogy az előző lépés irányát megváltoztatjuk egy minden előzménytől független véletlen szöggel.
- Ez a véletlen szög normális eloszlású, 0 várható értékkel és σ szórással. $\sigma > 0$ a modell paramétere.

Konvenció: A μ várható értékű, σ szórású normális eloszlást a nemzetközi szokásoknak megfelelően $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-tel jelölöm, nem pedig $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$-val, ahogy az néha az egyetemen megesik.

Jelöljük a k-adik lépést megelőző véletlen irányváltás szögét ρ_k-val. A fentiek szerint a ρ_k-k független $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ eloszlású val.változók, $k = 2, 3, \ldots$.

Az első lépés irányszögét jelölje φ_1. Így az m-edik lépés irányszöge ($m \geq 2$-re)

$$\varphi_m := \varphi_1 + \sum_{k=2}^{m} \rho_k.$$

Ha a síkot a komplex síknak tekintjük (amit a megoldás során *nem* fogok tenni), akkor így az m-edik lépés

$$v_m = e^{i\varphi_m} = e^{i(\varphi_1 + \sum_{k=2}^{m} \rho_k)}.$$

A részecske helye n lépés után

$$S_n = \sum_{m=1}^{n} v_m.$$

1.2. A kérdés

Kérdés, hogy hogyan távolodik a részecske az origótól, ahogy n nő. Pontosabban: mennyi $|S_n|$ várható értéke? Hogyan alakul ez nagy n-re? Mi a σ paraméter szerepe?

1.3. Egy pici pontosítás a modellhez

A kérdésekre adott válaszok nem függnek az első lépés φ_1 irányától, csak a σ paramétertől, ezért φ_1-et úgy választhatjuk, ahogy jól esik. Nekem úgy esik jól, hogy φ_1 véletlen és egyenletes eloszlású legyen $[0, 2\pi)$-n (és független az összes ρ_k-tól). Vagyis az első lépés, v_1 eloszlása egyenletes az egységkörön.

1.4. Amit tudok, és amit nem

Az eredeti kérdésre – az origótól való távolság várható értékére – csak nagy n esetén tudok okosat mondani, akkor viszont meg tudom mondani az aszimptotikát. Sokkal pontosabbat mondhatok, ha a helyvektor hossza helyett a hosszának négyzetét vizsgálom, vagyis $\mathbb{E}|S_n|$ helyett $\mathbb{E}(|S_n|^2)$-t kérdezem. Az 1.3-beli pótfeltevés miatt (szimmetria okból) S_n-nek, mint vektornak a várható értéke nulla, így $\mathbb{E}(|S_n|^2)$ egyben a helyvektor szórásnégyzete is. Mint ilyen, sokkal könnyebben számolható, mint az abszolútérték várható értéke. Erre az $\mathbb{E}(|S_n|^2)$-re pontos képlet adható minden n-re.

2. Megoldás

2.1. Könnyű rész: a hossznégyzet várható értéke

Keressük $\mathbb{E}(|S_n|^2)$-et. Ez egy elemi feladat, ami – bár számolni kell – első féléves val.szám ismeretekkel tökéletesen megoldható.

Konvenció: $a \cdot b$ alatt az a és b síkbeli vektorok *skalárszorzatát* értem, vagyis nem úgy tekintek rájuk, mint komplex számokra.

$S_n = \sum_{m=1}^n v_m$, így $|S_n|^2 = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n v_m \cdot v_l$, vagyis a várható érték linearitása miatt

$$\mathbb{E}(|S_n|^2) = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \mathbb{E}(v_m \cdot v_l) = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \mathbb{E} \cos \sphericalangle(v_m, v_l). \tag{1}$$

Ebből

$$\sphericalangle(v_m, v_l) = \begin{cases} \sum_{k=m+1}^{l} \rho_k & \text{, ha } l > m \\ 0 & \text{, ha } l = m \\ \sum_{k=l+1}^{m} \rho_k & \text{, ha } l < m. \end{cases}$$

Mindhárom esetben $\sphericalangle(v_m, v_l)$ úgy áll elő, mint $|l-m|$ darab független $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ eloszlású val-változó összege, így maga is normális eloszlású. Konkrétan

$$\sphericalangle(v_m, v_l) \sim \mathcal{N}(0, |l-m|\sigma^2).$$

2.1. Lemma. *Ha $X \sim \mathcal{N}(0, V)$, akkor $\mathbb{E}(\cos X) = e^{-\frac{V}{2}}$.*

Bizonyítás. $\mathbb{E}(e^{iX})$-et és $\mathbb{E}(e^{-iX})$-et kell kiszámolni. Ez egy elemi integráltranszformációval visszavezethető a normális sűrűségfüggvény integráljára. (Az igazán korrekt bizonyításhoz hozzátartozik egy hivatkozás a reziduumtételre, mert a komplex sík egy egyenesén kell integrálni, és az úgy tisztességes.) □

A lemmát alkalmazva

$$\mathbb{E} \cos \sphericalangle(v_m, v_l) = e^{-|l-m|\frac{\sigma^2}{2}}.$$

Vezessük be az $\alpha := e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$ jelölést. Így az előzőt (1)-be visszaírva

$$\mathbb{E}(|S_n|^2) = \sum_{m=1}^n \sum_{l=1}^n \alpha^{|l-m|},$$

amiből pár mértani sorozat összegzése után

$$\mathbb{E}(|S_n|^2) = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} n - \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} + \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^2} \alpha^n.$$

Ezzel az elemi feladat megoldása véget ért. Érdemes még megjegyezni, hogy nagy n-re az első tag dominál (mert $\alpha < 1$). Így az origótól való tipikus távolság, vagyis a szórás nagy n-re

$$\sqrt{\mathbb{E}(|S_n|^2)} \sim \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\sqrt{n}.$$

2.2. Kevésbé könnyű rész: a hossz várható értéke

Ez a feladat azért nehezebb, mert olyasmire kell hivatkozni, ami a val.szám 1 tananyagban nem szerepel. Nevezetesen:
Tény: Az S_n sorozatra igaz a centrális határeloszlás tétel, vagyis $n \to \infty$-re $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ eloszlása normális eloszláshoz tart. (Ez annak ellenére így van, hogy az S_n azonos eloszlású, de *nem* független val.változók összege.[1]) Természetesen a határeloszlás egy kétdimenziós, vagyis síkbeli normális eloszlás.

Természetes, hogy a határeloszlás nulla várható értékű és forgásszimmetrikus, mint ahogy S_n is az. Ezek tudatában a feladat már csak számolás:

2.2. Lemma. *Ha a $\overrightarrow{V}$ véletlen síkbeli vektor eloszlása nulla várható értékű, forgásszimetrikus normális eloszlás, akkor*

$$\frac{\mathbb{E}|\overrightarrow{V}|}{\sqrt{\mathbb{E}(|\overrightarrow{V}|^2)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Bizonyítás. Számolás. □

Ezt a lemmát az előző rész eredményével összerakva

$$\mathbb{E}|S_n| \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\sqrt{n}.$$

[1] A hivatkozandó tétel a „Centrális határeloszlás tétel Markov láncokra".