**Valószínűségszámítás 1. II. éves matematikus-hallgatóknak, illetve**
**Valószínűségszámítás (B4) II. éves mérnök-fizikus hallgatóknak**
**2005/2006. őszi félév, Szász Domokos**

**8. feladatsor**
**Eloszlások (folyt.): valószínűségi változók függvényei**

8.1. $X$ Poisson eloszlású valószínűségi változó, $\lambda$ paraméterrel. Írjuk fel az $Y := 2X+1$ valószínűségi változó eloszlását és számítsuk ki az $\mathbf{E}(Y)$ várható értéket és a $\mathbf{D}^2(Y)$ szórásnégyzetet.

8.2 Legyen $X$ a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg az $Y := X^{-1}$ és a $Z := X(1+X)^{-1}$ valószínűségi változók eloszlásfüggvényét és sűrűségfügvényét.

• 8.3 Legyen $X$ standard normális eloszlású valószínűségi változó. (Azaz $X$ normális eloszlású, amelynek várható értéke 0, szórásnégyzete 1.) Határozzuk meg az $Y := 2+|X|$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét.

• 8.4 Legyen $X$ $N(m,\sigma)$ normális eloszlású valószínűségi változó ($\mathbf{E}(X)=m$, $\mathbf{D}^2(X)=\sigma^2$). Határozzuk meg az $Y := e^X$ *log-normális* eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét.

• 8.5 Legyen $X$ *folytonos* eloszlású valószínűségi változó, melynek eloszlásfüggvénye $F(x)$.
• (a) Határozzuk meg az $Y := F(X)$ és a $Z := -\log(F(X))$ valószínűségi változók eloszlásfüggvényét.
$\star$ (b) Bizonyítsuk be, hogy ha $G : \mathbb{R} \to [0,1]$ eloszlásfüggvény és $G^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$-et a következő képpen értelmezzük: $G^{-1}(u) := \sup\{x \in \mathbb{R} : G(x) < u\}$, akkor az $Y := G^{-1}(F(X))$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye pontosan $G$.

8.6 Legyen $X$ egy valószínűségi változó amelyre $\mathbf{P}(X=0)=0$, és $Y := X^{-1}$. Mi a feltétele annak, hogy $X$ és $Y$ azonos eloszlásúak legyenek?

8.7 Legyen $X$ $LN(m,\sigma)$ log-normális eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye

$$f(x) := \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left\{\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

(a) Bizonyítsuk be (lehetőleg számolás nélkül), hogy ha $C > 0$ és $\alpha \neq 0$ rögzített konstansok, akkor a $Y := CX^\alpha$ valószínűségi változó szintén log-normális eloszlású, melynek papraméterei $m' = \alpha m + \log C$ és $\sigma' = \alpha\sigma$.
(b) Valamely homokfajta részecskéi gömb alakúak, melyeknek átmérője (milliméterben mérve) log-normális eloszlású, $m = -0.5$ és $\sigma := 0.3$ paraméterekkel. Az egész homokmennyiség hány *súlyszázaléka* áll 0.5 mm-nél kisebb átmérőjű szemcsékből?

8.8 Legyen az $X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(e^{-(x-m)^2/2} + e^{-(x+m)^2/2}\right).$$

(Ez azt jelenti, hogy $X = Y + Z$, ahol $Y$ és $Z$ független valószínűségi változók, $\mathbf{P}(Y = \pm m) = 1/2$ és $Z$ standard normális eloszlású.) Vizsgáljuk meg, hogy $m$ mely értékeire lesz a fenti sűrűségfüggvény unimodális (azaz: egy maximum pontú.)

• 8.9 A következő feladatokban adott a $\xi$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ill. sűrűségfüggvénye. Meg kell határozni az $\xi$ függvényeként értelmezett $X$, $Y$, $Z$, ... valószínűségi változók sűrűségfüggvényét
(a) $\xi$ egyenletes eloszlású a $[-1,1]$ intervallumban; $X := \xi^2$, $Y := \xi^3$, $Z := \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}\xi)$, $U := \sin(\pi\xi)$.
(b) $\xi$ exponenciális eloszlású $\lambda$ paraméterrel; $X := 3\xi+2$, $Y := \xi^2$, $Z := \sqrt{\xi}$.
(c) $\xi$ standard normális eloszlású; $X := \xi^2$, $Y := \xi^{-2}$.

8.10 Bizonyítsuk be, hogy ha $\xi$ Cauchy eloszlású valószínűségi változó, melynek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, és $X := 1/\xi$, $Y := 2\xi/(1-\xi^2)$, $Z := (3\xi-\xi^3)/(1-3\xi^2)$, akkor $X$, $Y$ és $Z$ szintén Cauchy eloszlású.

*Útmutatás:* Használjuk a következő trigonometriai azonosságokat: ha $\xi = \mathrm{tg}(\alpha)$, akkor $1/\xi = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$, $= 2\xi/(1-\xi^2) = \mathrm{tg}(2\alpha)$ és $(3\xi - \xi^3)/(1-3\xi^2) = \mathrm{tg}(3\alpha)$

8.11 Egy $\mathbb{N}$-értékű $X$ valószínűségi változó $k$-adik *faktoriális momentuma* $\mathbf{E}\big(X(X-1)(X-2)\dots(X-k+1)\big)$. Sok esetben a faktoriális momentumokat könnyebb kiszámolni, mint a momentumokat. De nyilvánvaló, hogy minden $k \in \mathbb{N}$-re a $k$-adik momentum kifejezhető az első $k$ faktoriális momentum segítségével. Számoljuk ki a binomiális-, Poisson- és geometriai eloszlások faktoriális momentumait. (Adjunk zárt kifejezést tetszőleges $k \in \mathbb{N}$-re.)

• 8.12 Számoljuk ki az $E(-1,1)$, $N(0,\sigma)$, EXP($\lambda$) eloszlások momentumait. (Szorgalmasabbaknak ajánljuk az $LN(m,\sigma)$ eloszlást is.) Adjunk zárt formulát $k \in \mathbb{N}$-re. Kommentáljuk a momentumok aszimptotikus viselkedését mikor $k \to \infty$.

8.13 Legyen $X$ standard Cauchy eloszlású, melynek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$. Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{E}(|X|) = \infty$, de bármely $\varepsilon > 0$-ra $\mathbf{E}(|X|^{1-\varepsilon}) < \infty$. Számoljuk ki a $\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\varepsilon\mathbf{E}(|X|^{1-\varepsilon})\right\}$ határértéket (ha egyáltalán létezik ... ).

8.14 Legyen $X_\lambda$ Poisson eloszlású valószínűségi változó, melynek várható értéke $\mathbf{E}(X_\lambda) = \lambda$. Számoljuk ki az $Y_\lambda := \sqrt{X_\lambda}$ valószínűségi változó szórásának határértékét, amint $\lambda \to \infty$.

8.15 Egy $\mathbb{N}$-értékű $X$ valószínűségi változó *generátor függvénye* $g_X : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $g_X(z) := \mathbf{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbf{P}(X = k)$. (A generátrofüggvény analitikusan kiterjeszthető a komplex sík $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ nyílt egységkörére.) Számoljuk ki a binomiális, Poisson- és geometriai eloszlások generátor függvényét.

8.16 Egy tetszőleges $X$ valószínűségi változó *karakterisztikus függvénye* $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\varphi_X(t) := \mathbf{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x)$. (Az integrál abszolút konvergens – ergo: a karakterisztikus függvény jól értelmezett – bármely valószínűségi változóra!) Számoljuk ki a $BIN(p,n)$, $POI(\lambda)$, $GEO(p)$, $E(a,b)$, $N(m,\sigma)$, $EXP(\lambda)$, $CAU(m,b)$ eloszlások karakterisztikus függvényét.