

**Valószínűségi számítás 1. II. éves matematikus-hallgatóknak, illetve
Valószínűségi számítás (B4) II. éves mérnök-fizikus hallgatóknak
2005/2006. őszi félév, Szász Domokos**

10. feladatsor

Együttes eloszlások, valószínűségi változók függvényei II.

Memo: Két (vagy több) valószínűségi változó együttes eloszlása, jellemzői.

Az (X, Y) valószínűségi változó pár együttes eloszlásfüggvénye: $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$F(x, y) := \mathbf{P}(X < x, Y < y).$$

Az együttes eloszlásfüggvény primér tulajdonságai:

(a) erős monotonitás: tetszőleges $a \leq b$ és $c \leq d$ -re

$$F(b, d) - F(b, c) - F(d, a) + F(a, c) \geq 0;$$

(b) $F(x, y)$ mindkét változójában balról folytonos.

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0$ és $\lim_{x, y \rightarrow \infty} F(x, y) = 1$.

Ha $F(x, y)$ előáll $F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(s, t) ds dt$ alakban, akkor az $F(x, y)$ együttes eloszlásfüggvény *abszolút folytonos* és *sűrűségfüggvénye* $f(s, t)$.

A sűrűségfüggvény primér tulajdonságai:

(a) mérhető;

(b) nemnegatív;

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(s, t) ds dt = 1$.

Marginális (vagy perem-) eloszlások:

$$F_1(x) := \mathbf{P}(X < x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y), \quad F_2(y) := \mathbf{P}(Y < y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y).$$

10.1 Általánosítsuk a fentieket (különös tekintettel a monotonásra és a limeszekre) $n > 2$ valószínűségi változó együttes eloszlására.

10.2 Mutassunk példát olyan kétváltozós $F(x, y)$ függvényre, amely rendelkezik az eloszlásfüggvények (b) és (c) tulajdonságával, mindkét változójában külön-külön monoton nem-csökkenő, de nem (erősen) monoton a fenti (a) értelemben. Miért nem lehet egy ilyen függvény együttes eloszlásfüggvény?

• 10.3 Együttes eloszlásfüggvény-e a következő két függvény?

$$F(x, y) = \exp(-e^{-(x+y)}), \quad G(x, y) = \exp(-e^{-x} - e^{-y}).$$

10.4 Legyenek $F(x)$ és $G(y)$ egydimenziós valószínűségi eloszlásfüggvények és $\alpha \in [-1, 1]$ rögzített. Bizonyítsuk be, hogy

$$H(x, y) = F(x)G(y)(1 + \alpha(1 - F(x))(1 - G(y)))$$

együttes eloszlásfüggvény, amelynek marginálisai $F(x)$, illetve $G(y)$.

10.5 Legyen (X, Y) az $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ egységkörben véletlenszerűen (egyenletes eloszlással) választott pont koordináta-párja. Határozzuk meg a peremeloszlások sűrűségfüggvényét.

• 10.6 Legyen az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye:

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{5}(x + xy + y) & \text{ha } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Határozzuk meg a peremeloszlásokat.

- 10.7 Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlásának sűrűségfüggvénye legyen $h(x, y) = f(x)f(y)$ alakú, ahol $f(x)$ egydimenziós sűrűségfüggvény. Legyen $U = \max\{X, Y\}$ és $V = \min\{X, Y\}$. Határozzuk meg U és V együttes eloszlásfüggvényét és ennek sűrűségfüggvényét.
- 10.8 (a) Legyen $(X_1, X_2, \dots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ (együttesen) normális eloszlású valószínűségi vektorváltozó. Bizonyítsuk be, hogy ha korrelálatlanok (azaz páronkénti kovarianciájuk nulla), akkor (teljesen) függetlenek is. (Azaz: együttes Gauss eloszlás + korrelálatlanság \Rightarrow függetlenség.)
(b) Legyenek X és Y független $N(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy az $U := (X + Y)/\sqrt{2}$ és $V := (X - Y)/\sqrt{2}$ valószínűségi változók is függetlenek és $N(0, 1)$ eloszlásúak.
- 10.9 Legyenek X, Y és Z független valószínűségi változók. Legyen X , ill. Y eloszlásfüggvénye $F(x)$, ill. $G(x)$, és legyen $\mathbf{P}(Z = 1) = p = 1 - \mathbf{P}(Z = 0)$. Határozzuk meg a következő valószínűségi változók eloszlásfüggvényeit:

$$T := ZX + (1 - Z)Y, \quad U := ZX + (1 - Z)\max\{X, Y\}, \quad V := ZX + (1 - Z)\min\{X, Y\}.$$

- 10.10 Legyenek X, Y és Z független, λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változók.
- (a) Határozzuk meg az $S := Y - X$ és $T := Z - Y$ valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényét.
(b) Határozzuk meg az $U := [X]$ és $V := X - [X]$ valószínűségi változók együttes eloszlását.
- 10.11 Legyenek X és Y független, $CAU(0, 1)$ eloszlású valószínűségi változók. Bizonyítsuk be, hogy $Z := (X + Y)/(1 - XY)$ is $CAU(0, 1)$ eloszlású.
Útmutatás: Használjuk a $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)/(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)$ azonosságot.
- 10.12 Egy téglalap oldalainak hossza legyen 1 ill. a . A két szemközti 1 hosszú oldalon egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk egy-egy véletlen pontot. Jelölje X a pontok távolságát. Meghatározandó X sűrűségfüggvénye.
- 10.13 (a) A $[0, 1]$ intervallumban egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk két véletlen pontot. Meghatározandó távolságuk eloszlás- és sűrűségfüggvénye.
(b) Egységnyi oldalhosszú négyzet belsejében egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölünk két véletlen pontot. Meghatározandó távolságuk eloszlás- és sűrűségfüggvénye.
- 10.14 Meghatározandó az \vec{X} és \vec{Y} véletlen vektorok által definiált paralelogramma területének várható értéke a következő három esetben:
(a) $\vec{X} := \vec{OA}$, $\vec{Y} := \vec{OB}$, ahol A és B a sík egységkörének kerületén egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölt véletlen pontok.
(b) \vec{X} és \vec{Y} egymástól független standard Gauss eloszlású kétdimenziós vektorváltozó. (Azaz az X_1, X_2, Y_1 és Y_2 függetlenek és $N(0, 1)$ eloszlásúak.)
(c) $\vec{X} := \vec{OA}$, $\vec{Y} := \vec{OB}$, ahol A és B a tér egységgömbjének felszínén egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással kijelölt véletlen pontok.
- 10.15 Legyen $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$ háromdimenziós véletlen vektor, amelynek komponensei független $N(0, 1)$ eloszlásúak. Definiáljuk a következő változókat:

$$\varrho := \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}, \quad \xi_i := X_i/\varrho, \quad i = 1, 2, 3.$$

- (a) Határozzuk meg ϱ sűrűségfüggvényét.
(b) Bizonyítsuk be, hogy ϱ és a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ vektorváltozó egymástól függetlenek, továbbá azt, hogy a ξ véletlen vektor egyenletes eloszlású az egységgömb felszínén.